Algel XI. gyakorlat

$P?NP$

2011. április 18.

1. Lássuk be, hogy az alábbi problémák NP-beliek! Melyekről tudjuk megmondani, hogy coNP-ben vannak? Melyekről, hogy P-ben?

   (a) $L_1 = \{(G, k) \mid G$ gráf kiszínezhető k színnel$\}$
   Tanú: megfelelő színezés. Méret: kn, ami polinomiális az input méretében. Ellenőrzés: páronként a pontokat, $O(n^2)$, ami polinomiális. P-beliségről vagy $coNP$-beliségről nem tudunk mit mondani.

   (b) $L_2 = \{(G, k) \mid G$ páros gráfban van k élből álló párosítás$\}$
   Tanú: ilyen párosítás. Méret: $O(n)$, ellenőrzés $O(n)$, tehát jó. (Egyébként pl magyar módsze polinom idejű, ezért ez P-ben van, így értelemszerűen $coNP$-ben is.)

   (c) $L_3 = \{G \mid G$ irányítatlan gráfban van Euler-kör$\}$
   Tanú: egy ilyen kör, ez jó mert blabla. Amúgy P-beli. $coNP$-beliségre szemléletes tanú egy ptlan fokszámú pont (+öf ellenőrzése).

   (d) $L_4 = \{(G, k) \mid G$ irányítatlan gráfban van k független pont$\}$
   Tanú: k független pont, ez jó mert blabla. P-beliségről vagy $coNP$-beliségről nem tudunk mit mondani.

   (e) $L_5 = \{G \mid G$ irányítatlan gráf, van benne pontosan 100 élből álló kör$\}$
   Tanú: egy ilyen kör, ez jó mert blabla. Egyébként P-beli, mert a kör legfeljebb $O(\frac{n!}{(n-100)!})$ féleképpen állhat elő, ami $O(n^100)$ (ha minden lehetséges pontsorrendet megvizsgálunk).

   (f) $L_6 = \{(G, k) \mid G$ irányítatlan gráf, van benne legalább k élből álló kör$\}$
   Tanú: egy ilyen kör, ez jó mert blabla. P-beliségről vagy $coNP$-beliségről nem tudunk mit mondani. (n^k nem polinomiális, ha k az input része!)

   (g) $L_7 = \left\{(s_1, s_2, \ldots, s_n, b) \mid \forall i\ s_i, b \in \mathbb{Z}^+; \exists j_1, \ldots, j_k\ (1 \le k \le n) : \sum_{l=1}^{k} s_{j_l} = b\right\}$
   Ez a részhalmazösszeg probléma, szépen megfogalmazva. Tanú: egy jó indexhalmaz, azaz egy megfelelő részhalmaz, ez jó mert blabla. P-beliségről vagy $coNP$-beliségről nem tudunk mit mondani.

2. **Adjunk Karp-redukciót a 3-SZÎN nyelvről a 4-SZÎN nyelvre!**
   Adott G gráf, amiről el kell dönteni, hogy színezhető-e 3 színnel. Ezt kell visszavezetni 4 színnel színezésre. Vegyünk fel egy új pontot (v), ezt kössük hozzá az összes G-beli ponthoz. Legyen ez a gráf G'. Állítás: $G \in 3SZIN \Leftrightarrow G' \in 4SZIN$. $G \in 3SZIN \Rightarrow G' \in 4SZIN$: vegyük G egy 3 színnel színezését, és adjuk v-nek a negyedik színt G'-ben. Ez a színezés jó lesz. $G \in 4SZIN \Rightarrow G' \in 3SZIN$: vegyük G' egy 4 színnel színezését. Ekkor v színe különbözik az összes csúcs színétől, így a többi csúcs pont G egy jó 3 színnel színezése szerint van színezve. Az átalakítás polinomiális.

3. **Bizonyítsuk be, hogy P-beli az olyan négy színnel színezhető G gráfokból álló nyelv, melyekre igaz, hogy G csúcsai kiszínezhetők a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék!**
   A piros és kék színeket legfeljebb $n\binom{n-1}{2}$ féle módon oszthatjuk ki, ami polinomiális. Minden kiosztáshoz a maradék gráfot két színnel kell színezni, ami P-beli feladat. Így polinomszor kell egy polinom költségű algoritmust futtatni, ami polinom időben megy.

4. **[Vizsga: 2007. május 29.] A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet és**

vagy lássa be róla, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes.
A nyelv:

$$L = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan csúcssúlyozott teljes gráf, amiben van legfeljebb } k \text{ levélsúlyú feszítőfa}\}$$

Ez NP-teljes. NP-beli, mert egy jó tanú egy ilyen feszítőfa (ellenőrzés polinom időben megy, a mérete is polinom). Adunk egy H-út$\prec$ L Karp-redukciót. Ha egy G gráfban Hamilton-utat keresünk, akkor minden csúcshoz rendeljünk 1 súlyt, és az így keletkezett G' gráfban keressünk legfeljebb 2 levélsúlyú feszítőfát! Állítás: $G \in H - ut \Leftrightarrow (G', 2) \in L$. $G \in H - ut \Rightarrow (G', 2) \in L$: G egy Hamilton-útja pont egy két levelű, 2 súlyú feszítőfa G'-ben. $(G', 2) \in L \Rightarrow G \in H - ut$: egy ilyen feszítőfának pontosan 2 levele kell, hogy legyen (ha több lenne, nagyobb lenne a súlya, egy fában pedig mindig van legalább 2 levél). Ez pedig pont egy olyan utat jelent, ami tartalmazza a gráf összes csúcsát, tehát G egy Hamilton-útját. A csúcsoknak súlyt adni lehet polinom időben.

5. **Bizonyítsuk be a következő problémáról, hogy NP-teljes, vagy azt, hogy P-beli!**

$$L = \{G \mid G \text{ irányítatlan teljes gráf, amiben van Hamilton-kör}\}$$

P-beli, mert polinom időben ellenőrizhetjük, hogy teljes-e a gráf. Ha nem, akkor a válasz nem, ha pedig igen, akkor mindenképp van benne Hamilton-kör, így a válasz igen.

6. **Tegyük fel, hogy van egy olyan F eljárásunk, ami egy input G gráfra és k számra 1 lépés alatt megmondja, hogy van-e G-ben legalább k méretű független ponthalmaz. Tervezzünk olyan algoritmust, ami polinomidőben**

   (a) **meghatározza $\alpha(G)$-t!**
   Van-e benne 1 ftln pont? Ha igen, van-e benne 2? Ha igen, van-e benne 3? Az első NEM válasznál (mondjuk k)-nál tudjuk, hogy $\alpha(G) = k - 1$. Lépésszám $O(n)$ a feltételezés miatt. Lehet bináris kereséssel is, így a lépésszám $O(\log n)$.

   (b) **talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt!**
   Meghatározzuk $\alpha(G)$-t mondjuk $O(\log n)$ időben. Választunk egy pontot, kitöröljük a gráfból, és megkérdezzük a maradékról, hogy van-e benne $\alpha(G)$ független pont. Ha igen, akkor az adott pont nem lehetett egy max. ftln ponthalmaz része, hiszen ekkor létezne a gráfban $\alpha(G) + 1$ független pont. Ha nem, akkor pedig biztos egy max. ftln halmazbeli pontot töröltünk. Ugyanezt megcsináljuk az összes többi pontra is úgy, hogy a törölt pontokat nem állítjuk vissza. Ha megvan $\alpha(G)$ pont, akkor kész vagyunk, és legfeljebb $O(n)$ lépésszámunk van (a feltételezés figyelembevételével).

7. **[Vizsga: 2008. június 10.] Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Az alábbi feltételek közül melyikből következik és melyikből nem következik hogy az X eldöntési probléma nem P-beli?**

   (a) **Egy NP-teljes Y problémára X Karp-redukálható.** Ez nem mond semmit X-ről, hiszen $P \subseteq NP$, és minden NP-beli visszavezethető tetszőleges NP-teljesre.

   (b) **Egy NP-teljes Y probléma Karp-redukálható X-re.** Ekkor X NP-nehéz, ami $X \in P$ esetén $P = NP$-t jelente, amit feltettünk hogy nem így van. Így X nem P-beli.

   (c) **az X probléma NP-beli.** Ettől még lehet P-ben is, hiszen $P \subseteq NP$.

8. **Mi az alábbi problémák bonyolultsága, ha az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$)? Természetesen bizonyítsuk is be!**

   (a) **Van-e G-ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?** P-beli, az összes lehetséges részgráf $O(\binom{n}{15}) = O(n^{15})$.

(b) **Van-e G-ben legalább $n/100$ hosszúságú kör?**
NP-teljes, tanú egy ilyen kör (poli ell, poli méret), valamint van H-körről Karp-redukció ($99n$ izolált pont).

(c) **Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?** Ez a H-út.

(d) **Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3?** NP-teljes, tanú egy ilyen feszfa, valamint előzőt erre vissza lehet vezetni (minden ponthoz egy elsőfokú pont).

9. **Bizonyítsuk be, hogy a leghosszabb út meghatározása egy irányított, élsúlyozott G gráfban NP-teljes! (Pontosabban az ehhez tartozó eldöntési probléma.) Másképpen: bizonyítsuk be, hogy**

$$L = \{(G,k) \mid G \textbf{ irányított, élsúlyozott gráf, van benne legalább } k \textbf{ súlyú út}\}$$

NP-teljes!
NP-beliség: tanú egy ilyen út, méret $O(n)$, ellenőrzés $O(n)$, tehát polinomiális. NP-nehézség: a H-út problémát fogjuk rá visszavezetni (H-út $\prec L$). A G gráfból, amiben H-utat kell keresni, csinálunk egy súlyozott gráfot, minden élsúlyt 1-re állítunk, és legalább $n-1$ súlyú út létezését kérdezzük (ez a gráf legyen G'). Egyik irány: ha van G-ben H-út, akkor G'-ben van legalább $n-1$ súlyú út, mert a G-beli H-út pont ilyen G'-ben. Másik irány: ha van G'-ben legalább $n-1$ súlyú út, akkor ez az 1 súlyok miatt legalább $n-1$ élből áll, tehát minden csúcson keresztülmegy, vagyis ez pont egy H-út G-ben. Az átalakítás triviálisan polinomiális.

10. **[Vizsga: 2007. június 12.] Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P-ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:**

$$\{(G,k) \mid G \textbf{ egy síkgráf, amiben van } k \textbf{ pontú klikk}\}$$

Mutassa meg, hogy ez a nyelv NP-teljes, vagy mutassa meg, hogy a nyelv P-ben van.
P-beli. Először ellenőrizzük a síkgráfságot (polinom). Ha nem, akkor nincs a nyelvben. Ha igen, és $k > 4$, akkor szintén nem, hiszen K_5 biztos nincs benne. Egyébként legfeljebb $O(\binom{n}{4}) = O(n^4)$ lehetőséget kell végignézni.

11. **[Vizsga: 2009. május 28.] P-beli vagy NP-teljes az alábbi probléma? Adott egy $G = (V,E)$ irányítatlan gráf és az a kérdés, hogy van-e olyan C kör a gráfban, melyhez minden $v \notin C$ csúcsból vezet él.**
NP-teljes. NP-beliség: tanú egy ilyen kör, mérete $O(n)$, ellenőrzés szintén polinomiális. NP-nehézség: $H \prec L$ visszavezetést csinálunk. G gráfról kérdés, hogy van-e benne H-kör. Csinálunk egy G' gráfot úgy, hogy G minden csúcsához felveszünk egy új csúcsot, ami kizárólag a saját párjával van összekötve, és G'-ről kérdezzük meg, hogy van-e benne ilyen C kör. Helyesség: egyik irány: ha G-ben van H-kör, akkor ez egy jó C kör G'-ben, hiszen az extra pontok közül mindegyik kapcsolódik hozzá, az összes többi pedig a körben van. Másik irány: ha van ilyen C kör G'-ben, akkor az összes extra elsőfokú pontnak kapcsolódnia kell hozzá, továbbá ezek a pontok nyilván nem lehetnek benne. Vagyis a kör pont az összes G-beli ponton megy át, azaz ez G-nek egy H-köre. Az átalakítás n él és csúcs felvétele, ami nyilván polinomiális.

12. **[Vizsga: 2010. május 27.] Az árvíz több helyen fenyegeti a gátakat, tudjuk, hogy n kritikus hely van. Ezek közül az i-ediknél a gát megfelelő megerősítéséhez h_i darab homokzsák kell. Ha az erősítés nem történik meg (vagy csak kevesebb homokzsákkal), akkor az i-edik helyen k_i kárt okoz a folyó. Adottak a h_i és k_i pozitív számok, továbbá a gátak megerősítéséhez összesen rendelkezésre álló homokzsákok**

Z száma ($Z > 0$ egész). Azt szeretnénk meghatározni, hogy ennyi homokzsákkal hogyan tudjuk a kárt minimalizálni, ha feltesszük, hogy a meg nem erősített pontokon keletkező károk összeadódnak.

Fogalmazza meg a feladatot eldöntési problémaként és vagy adjon rá polinomiális algoritmust vagy igazolja, hogy a probléma NP-teljes!

$\pi = \{h_1, \ldots, h_n, k_1, \ldots, k_n, Z, K | \forall h_i, k_i > 0; Z \in \mathbb{Z}^+; \exists\text{zsákkiosztás, hogy a megelőzött kár} \geq K\}$

Érdemes észrevenni, hogy nem a kár minimalizálása felől közelítjük meg a problémát, hanem a megelőzött kár maximalizálása felől. Ez a probléma NP-teljes. NP-beli, mert jó tanú egy zsákkiosztás, mérete, ellenőrzése polinomiális. NP-nehéz, HÁTIZSÁK $\prec \pi$ visszavezetést tudunk triviálisan csinálni: ha adott egy hátizsák feladat, akkor s_i súly legyen az árvizes problémában h_i, c_i érték legyen k_i, az S súlykorlát legyen a Z zsákkorlát, a legalább elérendő C érték pedig a legalább megelőzendő K kár. A helyesség és a visszavezetés polinomiálissága triviális.

13. **[Vizsga: 2010. május 27.] Az X probléma bemenete egy binárisan felírt $N > 0$ egész szám, és akkor lesz a válasz `igen`, ha N nem 2-hatvány. Az Y probléma bemenete egy G egyszerű gráf, és akkor lesz a válasz `igen`, ha G csúcsainak színezéséhez 3-nál több szín kell. Ha feltesszük, hogy $P \neq NP$, akkor van-e $X \prec Y$, illetve $Y \prec X$ Karp-redukció?**
$X \in P$, hiszen a bináris felírásban a 2-hatványságot triviális ellenőrzni (pontosan 1 darab 1-es érték lehet). Y probléma a 3SZÍN komplementere, így $coNP$-teljes. $X \prec Y$ biztosan van, hiszen egy $coNP$-teljes problémára bármely $coNP$-beli, így bármely P-beli visszavezethető ($P = coP \subseteq coNP$). Ha létezne $Y \prec X$ visszavezetés, akkor $P = coNP$ lenne, amiből következne $P = NP$, ez pedig ellentmond a feltevésnek, tehát ilyen nem lehet.

14. **[Vizsga: 2010. június 17.] Az X problémában adott egy G dag és egy k pozitív egész szám, a kérdés, hogy van-e G-ben legalább k élű út. Igaz-e, hogy $X \prec$ 3SZÍN, illetve, hogy 3SZÍN $\prec X$?**
$X \in P$, hiszen mint tudjuk, DAG-ban a leghosszabb út keresése polinomiális. 3SZÍN ismerten NP-teljes. Az NP-teljesség definíciója miatt $X \prec$ 3SZÍN biztos létezik (bármely NP-beli visszavezethető bármely NP-teljesre, valamint $P \subseteq NP$). Ha létezne 3SZÍN $\prec X$, akkor minden NP-beli probléma polinom lépésben megoldható lenne, így $P = NP$ lenne, ami ellentmond a feltételünknek, vagyis ez nem lehetséges.

15. **[Vizsga: 2007. június 12.] Igazolja, hogy ha a 3SZÍN nyelv benne van $coNP$-ben, akkor $NP = coNP$.**
A Karp-redukció helyessége nem függ az igen vagy nem választól (acsa feltétel van benne). Ha egy NP-belire NEM a válasz, akkor ezt visszavezetjük 3SZÍN-re, a visszavezetett probléma NEM válaszára van megfelelő tanú (mert a feltétel szerint 3SZÍN $\in coNP$), tehát ez az adott NP-beli probléma NEM válaszára is tanú, tehát ez is $coNP$-beli. Vagyis $NP \subseteq coNP$, hiszen fentiek minden NP-belire igazak. Hasonló gondolatmenettel belátható, hogy $coNP \subseteq NP$. A kettőből pedig következeik, hogy $NP = coNP$.