Algel XI. gyakorlat

$P?NP$

2011. április 18.

Hasznos tudnivalók

- Eldöntési problémákról beszélünk!
- $P \subseteq NP$, $P \subseteq coNP$. Tehát ha valami P-beli, akkor **biztos**, hogy NP-beli és $coNP$-beli is!!!
- **P-beliség bizonyítása**: adunk egy polinom idejű algoritmust. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát. Nem fontos a hatékonyság, n^{100} is polinomiális!
- **NP-beliség bizonyítása**: tanú mutatása, tanú mérete polinomiális, ellenőrzés polinomiális. **Nem kell algoritmus a tanú előállítására**!!! A tanú lehet pofátlanul egyszerű. Nem redukálunk, nem fejtegetjük P és NP viszonyát.
- **NP-teljesség bizonyítása** π_{uj} problémára:
  1. π_{uj} NP-beliségének bizonyítása.
  2. π_{uj} NP-nehézségének bizonyítása:
     (a) Találunk egy vele kapcsolatba hozható problémát, ami ismerten NP-teljes, ez legyen π_{ismert}.
     (b) Bemutatunk egy $\pi_{ismert} \prec \pi_{uj}$ Karp-redukciót, az irány **eszméletlenül fontos**! Azaz van egy π_{ismert}-beli kérdésünk (**nem az aktuális probléma**, hanem egy ismerten nehéz!), azt átalakíthatjuk, és átalakítva bedobjuk a π_{uj}-t (az egyelőre ismeretlen nehézségű problémát) megoldó fekete dobozba, és ez a válasz lesz az eredeti kérdésünkre is a válasz! Tehát az átalakítást kell megadni, arra jár a pont.
     (c) Bizonyítjuk a Karp-redukció helyességét. Azaz, ha f az átalakítás: $x \in \pi_{ismert} \Leftrightarrow f(x) \in \pi_{uj}$ a bizonyítandó. Figyelem! **Két bizonyítás**, akkor és csak akkor, „$\Leftrightarrow$”!
     (d) Belátjuk, hogy f polinom időben elvégezhető.

Feladatok

1. Lássuk be, hogy az alábbi problémák NP-beliek! Melyekről tudjuk megmondani, hogy coNP-ben vannak? Melyekről, hogy P-ben?
   (a) $L_1 = \{(G,k) \mid G \text{ gráf kiszínezhető } k \text{ színnel}\}$
   (b) $L_2 = \{(G,k) \mid G \text{ páros gráfban van } k \text{ élből álló párosítás}\}$
   (c) $L_3 = \{G \mid G \text{ irányítatlan gráfban van Euler-kör}\}$
   (d) $L_4 = \{(G,k) \mid G \text{ irányítatlan gráfban van } k \text{ független pont}\}$
   (e) $L_5 = \{G \mid G \text{ irányítatlan gráf, van benne pontosan 100 élből álló kör}\}$
   (f) $L_6 = \{(G,k) \mid G \text{ irányítatlan gráf, van benne legalább } k \text{ élből álló kör}\}$
   (g) $L_7 = \left\{(s_1, s_2, \ldots, s_n, b) \mid \forall i\ s_i, b \in \mathbb{Z}^+; \exists j_1, \ldots, j_k\ (1 \le k \le n) : \sum_{l=1}^{k} s_{j_l} = b\right\}$
2. Adjunk Karp-redukciót a 3-SZÍN nyelvről a 4-SZÍN nyelvre!
3. Bizonyítsuk be, hogy P-beli az olyan négy színnel színezhető G gráfokból álló nyelv, melyekre igaz, hogy G csúcsai kiszínezhetők a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék!

4. **[Vizsga: 2007. május 29.]** A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet és vagy lássa be róla, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes.

5. Bizonyítsuk be a következő problémáról, hogy NP-teljes, vagy azt, hogy P-beli!

$$L = \{G \mid G \text{ irányítatlan teljes gráf, amiben van Hamilton-kör}\}$$

6. Tegyük fel, hogy van egy olyan F eljárásunk, ami egy input G gráfra és k számra 1 lépés alatt megmondja, hogy van-e G-ben legalább k méretű független ponthalmaz. Tervezzünk olyan algoritmust, ami polinomidőben

   (a) meghatározza $\alpha(G)$-t!

   (b) talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt!

7. **[Vizsga: 2008. június 10.]** Tegyük fel, hogy $P \neq NP$. Az alábbi feltételek közül melyikből következik és melyikből nem következik hogy az X eldöntési probléma nem P-beli?

   (a) Egy NP-teljes Y problémára X Karp-redukálható.

   (b) Egy NP-teljes Y probléma Karp-redukálható X-re.

   (c) az X probléma NP-beli.

---

8. Mi az alábbi problémák bonyolultsága, ha az input egy $G(V, E)$ gráf ($|V| = n, |E| = e$)? Természetesen bizonyítsuk is be!

   (a) Van-e G-ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?

   (b) Van-e G-ben legalább $n/100$ hosszúságú kör?

   (c) Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2?

   (d) Van-e G-ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3?

9. Bizonyítsuk be, hogy a leghosszabb út meghatározása egy irányított, élsúlyozott G gráfban NP-teljes! (Pontosabban az ehhez tartozó eldöntési probléma.) Másképpen: bizonyítsuk be, hogy

$$L = \{(G, k) \mid G \text{ irányított, élsúlyozott gráf, van benne legalább } k \text{ súlyú út}\}$$

   NP-teljes!

10. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv P-ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:

$$\{(G, k) \mid G \text{ egy síkgráf, amiben van } k \text{ pontú klikk}\}$$

   Mutassa meg, hogy ez a nyelv NP-teljes, vagy mutassa meg, hogy a nyelv P-ben van.

11. **[Vizsga: 2009. május 28.]** P-beli vagy NP-teljes az alábbi probléma? Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan gráf és az a kérdés, hogy van-e olyan C kör a gráfban, melyhez minden $v \notin C$ csúcsból vezet él.

12. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Az árvíz több helyen fenyegeti a gátakat, tudjuk, hogy n kritikus hely van. Ezek közül az i-ediknél a gát megfelelő megerősítéséhez h_i darab homokzsák kell. Ha az erősítés nem történik meg (vagy csak kevesebb homokzsákkal), akkor az i-edik helyen k_i kárt okoz a folyó. Adottak a h_i és k_i pozitív számok, továbbá a gátak megerősítéséhez összesen rendelkezésre álló homokzsákok Z száma ($Z > 0$ egész). Azt szeretnénk meghatározni, hogy ennyi homokzsákkal hogyan tudjuk a kárt minimalizálni, ha feltesszük, hogy a meg nem erősített pontokon keletkező károk összeadódnak.

    Fogalmazza meg a feladatot eldöntési problémaként és vagy adjon rá polinomiális algoritmust vagy igazolja, hogy a probléma NP-teljes!

13. **[Vizsga: 2010. május 27.]** Az X probléma bemenete egy binárisan felírt $N > 0$ egész szám, és akkor lesz a válasz `igen`, ha N nem 2-hatvány. Az Y probléma bemenete egy G egyszerű gráf, és akkor lesz a válasz `igen`, ha G csúcsainak színezéséhez 3-nál több szín kell. Ha feltesszük, hogy $P \neq NP$, akkor van-e $X \prec Y$, illetve $Y \prec X$ Karp-redukció?

14. **[Vizsga: 2010. június 17.]** Az X problémában adott egy G dag és egy k pozitív egész szám, a kérdés, hogy van-e G-ben legalább k élű út. Igaz-e, hogy $X \prec$ 3SZÍN, illetve, hogy 3SZÍN $\prec X$?

15. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Igazolja, hogy ha a 3SZÍN nyelv benne van $coNP$-ben, akkor $NP = coNP$.