Algel I. gyakorlat

Barátkozás a tárggyal és egymással

2011. február 7.

1. Tegyük fel, hogy van egy számítógépes programunk, ami egy k méretű feladaton a jelenlegi gépünkön 1 nap alatt fut le. Beszereztünk egy százszor gyorsabb számítógépet. Ugyanazon programmal mekkora feladatot lehet az új gépen egy nap alatt megoldani, ha a program lépésszáma n méretű feladat esetén (a) n-nel, (b) n^3-bel, illetve (c) 2^n-nel arányos?

2. Jelöljük $T(n)$-nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(1) = 2$ és $T(n) = T(n-1) + 3$, amennyiben $n \geq 2$. Adjuk meg $T(n)$-t zárt alakban!

3. Jelöljük $T(n)$-nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(1) = 2$ és $T(n) = 3 \cdot T(n-1) + 1$, amennyiben $n \geq 2$. Adjuk meg $T(n)$-t zárt alakban!

4. Négy ember egy rozoga hídhoz érkezik éjszaka. Egyszerre legfeljebb kettőjüket bírja el, ráadásul fény nélkül nem lehet biztonságosan átkelni, lámpájuk viszont csak egy van. Magabiztosság- és testi adottságbeli különbségek miatt az átkelési idők a következők: 1, 2, 5 és 10 perc az egyes emberekre. Legkevesebb mennyi idő alatt tudnak átjutni? (Kerülőút nincs, úszni nem lehet, valamint két ember átkelése esetén pontszerűnek tekintendők.)

5. Egy f fokú létrán bizonyos fokok annyira rozogák, hogy ha rálépünk, leszakadnak. Szerencsére tudjuk, hogy melyik fokok ilyenek, hova nem szabad lépnünk. Egy lépéssel legfeljebb 3 fokot tudunk lépni. Adjunk algoritmust ami meghatározza, hogy a létra aljától fel tudunk-e jutni a létra legfelső fokára! (Feltehető, hogy a legfelső fokra rá szabad lépni.) Az algoritmus lépésszáma legyen $c \cdot f$, ahol c valami fix konstans.

6. Adott n chip, melyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha összekapcsolunk két chipet, mindkét chip nyilatkozik a másikról, hogy hibásnak találta-e. Egy hibátlan chip korrektül felismeri, hogy a másik hibás-e, míg egy hibás chip akármilyen választ adhat. Tegyük fel, hogy a chipek több, mint a fele korrekt. Adjunk algoritmust, mely n-nél kevesebb fenti tesztet használva kikeres egy jó chipet.

---

7. Igaz-e a következő állítás: Minden olyan borgnak, aki ebben a szobában van, piros fülei vannak.

8. Mi a tagadása az alábbi állításoknak? Igazak ezek az állítások?

   (a) Minden hétfőn van algel gyakorlat.

   (b) Minden olyan hallgató, aki jár algel gyakorlatra, átmegy a vizsgán.

   (c) Minden olyan 17 lábú zsiráf, aki jár algel gyakorlatra, az átmegy a vizsgán.

9. Fogalmazzuk meg az alábbi állítás tagadását úgy, hogy ne szerepeljen benne tagadószó!
   „Minden asszony életében van olyan pillanat, hogy szeretne olyat tenni, ami nem szabad.”

10. Van két állítás, p és q. Tudjuk, hogy ha p igaz, akkor q is igaz. Következik-e ebből, hogy ha q nem igaz, akkor p sem igaz?

11. Tudjuk, hogy minden hömpörő surjancs. Mondjuk meg minden alábbi állításra, hogy biztosan igaz, lehetséges, vagy biztosan hamis!

    (a) Tudjuk valamiről, hogy nem hömpörő. Azt állítom, hogy ez surjancs.

    (b) Tudjuk valamiről, hogy hömpörő. Azt állítom, hogy ez nem surjancs.

(c) Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez hömpörő.

(d) Tudjuk valamiről, hogy nem surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.

(e) Tudjuk valamiről, hogy surjancs. Azt állítom, hogy ez nem hömpörő.

---

12. Bizonyítsuk be, hogy

    (a) $\log_2 f(n) = \Theta(\log_{100} f(n)) \quad (f(n) > 0)$,

    (b) $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots + a_0 \quad (a_k \neq 0) \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Theta(n^k)$,

    (c) $2^{n+1} = O(2^n)$, de $2^{2n} \neq O(2^n)$,

    (d) $\max(f(n), g(n)) = \Theta(f(n) + g(n)) \quad (f(n), g(n) > 0)$!

13. Igaz-e, hogy

    (a) ha $f = O(g)$ és $g = O(h)$, akkor $f = O(h)$;

    (b) ha $f = \Omega(g)$ és $g = \Omega(h)$, akkor $f = \Omega(h)$?

14. Tudjuk, hogy $f(x) = O(h(x))$ és $g(x) = O(h(x))$. Igaz-e, hogy

    (a) ha $h(x) = 3x$, akkor $f(g(x)) = O(h(x))$;

    (b) $f(g(x)) = O(h(x))$ $\forall h$ függvényre?

15. Az alábbi függvényeket rendezzük olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = 8n^{2.5}, \quad f_2(n) = 5\sqrt{n} + 1000n, \quad f_3(n) = 2^{\log^2 n}, \quad f_4(n) = 2008n^2 \log n$$

16. Az $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n^2)$. Lehetséges-e, hogy

    (a) $\forall n$ hosszú bemeneten $O(n)$ lépést használ?

    (b) $\exists x$, hogy az x bemeneten az algoritmus lépésszáma $10|x|^2 \log |x| - 800$ (ahol $|x|$ az x bemenet hosszát jelöli)?

17. **[Vizsga: 2007. június 19.]** Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = 2^{100n} - 2^{50n}, \quad f_2(n) = 2007n^3, \quad f_3(n) = 3^{3n}$$

18. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy

    (a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma x^3?

    (b) minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ? (Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)

19. **[Vizsga: 2007. június 5.]** Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n = 2k > 4$ páros számra $L(2k) \leq L(2k-2) + 1$ teljesül, és hogy $L(4) = 10$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n)$?

20. Jelöljük $T(n)$-nel egy algoritmus legnagyobb lehetséges lépésszámát az n méretű inputokon. Tudjuk, hogy $T(n) \leq 10$, ha $n \leq 5$ és $T(n) \leq T(n-1) + n/3$, ha $n > 5$. Ekkor mit tudunk mondani $T(n) = O(n)$, $T(n) = O(n^2)$ és $T(n) = O(n^3)$ egyenlőségek helyességéről?