Algel IX. gyakorlat

Hash!

2009. április 7/9.

1. Nyitott címzéssel hash-eltünk egy 11 elemű táblába a $h(k) = k \pmod{11}$ hash-függvény segítségével. A következő kulcsok érkeztek (a megadott sorrendben): $10, 22, 31, 4, 15, 28, 17, 88, 59$. Adjuk meg a tábla végső állapotát a következő két próbamódszerre:

   (a) lineáris próba;

   (b) kvadratikus maradék próba!

2. Mutassuk meg, hogy nyitott címzéses hashelés és lineáris próba esetén már két kulcshoz tartozó hash-függvényérték megegyezése is okozhat tetszőlegesen nagy méretű csomósodást!

3. Mi a baja a $h(k) = k^2 \pmod 7$ hash-függvénynek, ha a tábla 7 méretű?

4. A $T[0 : M-1]$ táblában rekordokat tárolunk nyitott címzésű hashelt szervezéssel. Az ütközések feloldására lineáris próbát alkalmazunk. Tegyük fel, hogy a tábla használata során egy hibás törlés történt: egy cellából kitöröltünk egy rekordot a törlés-bit beállítása nélkül.

   (a) Igaz-e, hogy a hibás törlés helye mindig megtalálható?

   (b) Adjunk hatékony (lineáris) algoritmust a tábla megjavítására! (Módosítsuk a táblát úgy, hogy megszűnjenek a hibás törlés negatív következményei!)

5. A $T[0 : M-1]$ táblában $2n$ elemet helyeztünk el az első $3n$ helyen egy ismeretlen hash-függvény segítségével. A táblában minden $3i$ indexű hely üresen maradt ($0 \le i \le n$). Legfeljebb hány ütközés lehetett, ha az ütközések feloldására

   (a) lineáris próbát használtunk?

   (b) kvadratikus próbát használtunk?

6. A kezdetben üres M méretű hash-táblába sorban beraktuk a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ kulcsokat a $h(x) = x \pmod M$ hash-függvénnyel, lineáris próbával. Jelölje t_1 a keletkezett táblában az egymás melletti foglalt mezők maximális számát (ciklikusan értve). Amikor ugyanezt a sorozatot ugyanebben a sorrendben egy üres $2M$ méretű táblába szúrjuk be a $h(x) = x \pmod{2M}$ hash-függvénnyel, lineáris próbával, akkor a kapott táblában legyen t_2 az egymás melletti foglalt mezők maximális száma.

   (a) Igazoljuk, hogy $t_2 \le t_1$!

   (b) Igaz-e, hogy $t_1 \le 2t_2$?

7. Nyitott címzéssel, lineáris próbálással akarjuk a $K_1 < K_2 < \cdots < K_n$ kulcsú elemeket egy tömbbe hash-elni a beszúrási algoritmus következő módosításával: ha egy K kulcsú elem beszúrásának megkísérlésekor a K-nál nagyobb K' kulcsú elem foglalja el a cellát, akkor a K kulcsú elemünket behelyezzük ebbe a cellába, és a beillesztést K helyett a K' kulcsú elemmel folytatjuk a következő cellánál (és ha ott a K'-nél nagyobb K'' kulcsú elemet találjuk, akkor az előbbihez hasonlóan járunk el). Bizonyítsuk be, hogy az n elem beillesztése után kapott tömb független az elemek beszúrási sorrendjétől!

8. **[Vizsga: 2008. június 3.]** Az 1 és 91 közötti összes 3-mal osztható egész számot valamilyen sorrendben egy M méretű hash-táblába raktuk a $h(x) = x \pmod M$ hash-függvény segítségével, lineáris próbával. Ennek során hány ütközés fordulhatott elő, ha $M = 35$, illetve ha $M = 36$?

9. **[Vizsga: 2005. május 26.]** A kezdetben üres M méretű hash-táblába sorban beraktuk a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ kulcsokat a $h(x) \equiv x \pmod{M}$ hash-függvénnyel, lineáris próbával. Jelölje t_1 a keletkezett táblában az egymás melletti foglalt mezők maximális számát. Amikor ugyanezt a $k_1, k_2, \ldots, k_n$ sorozatot ugyanabban a sorrendben egy üres $2M$ méretű táblába rakjuk be a $h(x) \equiv x \pmod{2M}$ hash-függvénnyel, lineáris próbával, akkor a kapott táblálban legyen t_2 az egymás melletti foglalt mezők maximális száma.

   (a) Igazolja, hogy $t_2 \leq t_1$

   (b) Igaz-e, hogy $t_1 \leq 2t_2$?

---

10. **[Vizsga: 2003. március 31.]** Tervezzen adatstruktúrát a következő feltételekkel. Természetes számokat kell tárolni, egy szám többször is szerepelhet. A szükséges műveletek:
BESZÚR(i): i egy újabb példányát tároljuk
TÖRÖL(i): i egy példányát töröljük
MINDTÖRÖL(i): i összes példányát töröljük
DARAB(i): visszaadja, hogy hány példány van i-ből
ELEM(K): megmondja, a nagyság szerinti rendezésben a K-adik elem értékét.
Az adatstruktúra legyen olyan, hogy ha m-*féle* elemet tárolunk, akkor mindegyik művelet lépésigénye $O(\log m)$.
(Például ha a tárolt elemek $1, 1, 3, 3, 3, 8$, akkor DARAB(1) $= 2$, ELEM(4) $= 3$ és $m = 3$.)

11. **[PZH: 2008. május 9.]** Vázolja a 2-3 fának (és műveleteinek) egy olyan módosítását, amiben továbbra is van KERES, BESZÚR, TÖRÖL, MIN, MAX művelet, és ezeken kívül van még RANG és K-ADIK művelet is, ahol RANG(x) azt adja vissza, hogy a tárolt elemek között az x a rendezés szerint hányadik elem, a K-ADIK(i) pedig, hogy a rendezés szerint a tárolt elemek közül melyik az i-edik. A módosítás során a felsorolt szokásos műveletek lépésszámának nagyságrendje ne változzon, és mindkét új művelet lépésszáma legyen $O(\log n)$, ahol n a tárolt elemek száma.