Algel VIII. gyakorlat

Trükkösebb fák

2009. március 31./április 2.

Piros-fekete fák

- minden nem levél(=belső) csúcsnak két fia van
- elemeket a belső csúcsokban tárolunk (levélben nem)
- teljesül a keresőfa-tulajdonság
- a fa minden csúcsa piros vagy fekete
- a gyökér fekete
- a levelek feketék
- piros csúcs mindkét gyereke fekete
- minden v csúcsra igaz, hogy az összes v-ből levélbe vezető úton ugyanannyi fekete csúcs van.

Tételek:

1. Egy piros-fekete fa minden v csúcsára teljesül, hogy
$$\frac{m(v)}{2} \leq fm(v) \leq m(v).$$
2. Egy piros-fekete fában az F_v részfa belső csúcsainak száma legalább $2^{fm(v)} - 1$.
3. Ha egy piros-fekete fában n elemet tárolunk, akkor a fa magassága legfeljebb $2\log(n+1)$.

2-3 fák, B-fák

- az elemeket a levelekben tároljuk, balról jobbra növekvő sorrendben, egy levél egy elemet (rekordot) tartalmaz
- a belső csúcsokban csak kulcsokat és mutatókat tárolunk, minden csúcsnak legalább 2, legfeljebb 3 fia van (B_m-fáknál $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ ill. m, kivéve a gyökér, ahol a triviális esetet leszámítva legalább 2 fiúnak kell lenni)
- a fa levelei a gyökértől egyforma távolságra vannak

Tételek:

1. Ha egy 2-3 fának l szintje van, akkor a levelek száma legalább 2^{l-1}.
2. Ha egy 2-3 fában n elemet tárolunk, akkor a szintjeinek száma legfeljebb $\log_2 n + 1$.
3. Ha egy B_m-fában n elemet tárolunk, akkor a szintjeinek száma legfeljebb
$$\frac{\log_2 n - 1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} + 2.$$

Feladatok

1. Építsünk piros-fekete fát a következő sorrendben érkező kulcsokkal: $7, 8, 2, 10, 5, 6$!

2. Építsünk 2-3 fát a következő elemekből, ebben a sorrendben: D, B, E, A, C, F, G! Ezután töröljük D-t és B-t!

3. (a) Lehet-e tetszőleges (adott) kulcshalmaz esetén olyan piros-fekete fát építeni, hogy az azonos szinten lévő elemek azonos színűek legyenek?

   (b) Van-e olyan piros-fekete fa, ami nem így néz ki?

4. Határozzuk meg a (levelek nélkül) 8 magasságú piros-fekete fák minimális, illetve maximális csúcsszámát!

5. Egy 2-3 fának 10^9 levele van. Mekkora a szintjeinek minimális, ill. maximális száma? És ha B_{20} fát használnánk?

6. Adott egy n pontú piros-fekete fa. Adjunk egy $O(n)$ lépésszámú algoritmust az $1, 2, \ldots, n$ számok egy olyan sorrendjének meghatározására, amely esetén a piros-fekete fa építő algoritmusa a megadott fát hozza létre, mégpedig forgatás nélkül!

7. Az $[1, 178]$ intervallum összes egészei egy 2-3 fában helyezkednek el. Tudjuk, hogy a gyökérben két kulcs van, és ezek közül az első 17. Mi lehet a második? Miért?

8. Az S_1 és S_2 kulcshalmazokat kiegészített 2-3 fákban tároljuk. Ezek az eredeti 2-3 fától annyiban különböznek csak, hogy minden csúcsban nyilván van tartva az onnan induló részfa magassága. Tudjuk továbbá, hogy az S_1-beli kulcsok mind kisebbek, mint az S_2-beliek. Javasoljunk hatékony algoritmust a két fa egyesítésére!

9. **[ZH: 2007. április 27.]** Egy piros-fekete fában lehetséges-e, hogy a piros-fekete tulajdonság megsértése nélkül

   (a) néhány fekete csúcsot átváltoztathatunk pirosra?

   (b) valamelyik (csak egy) fekete csúcsot átváltoztathatjuk pirosra?

   (Mást nem változtatunk a fán.)

10. **[Vizsga: 2007. június 5.]** Adott egy n csúcsú és egy k csúcsú piros-fekete fa. A két fában tárolt összes elemből $O(n + k)$ lépésben készítsen rendezett tömböt.

11. **[ZH: 2004. március 29.]** Egy kezdetben üres 2-3 fába az $1, 2, \ldots, n$ számokat szúrtuk be ebben a sorrendben. Bizonyítsa be, hogy a keletkezett fában a harmadfokú csúcsok száma $O(\log n)$.

12. **[ZH: 2003. március 31.]** Egy 2-3 fába egymás után 1000 új elemet illesztettünk be. Mutassa meg, hogy ha ennek során egyszer sem kellett csúcsot szétvágni, akkor a beillesztések sorozata előtt már legalább 2000 elemet tároltunk a fában.

13. Egy fában az x csúcs *súlya* legyen x leszármazottainak száma. Egy bináris fát szigorúan binárisnak mondunk, ha a levelek kivételével minden csúcsnak pontosan 2 fia van. Tegyük fel, hogy egy szigorúan bináris fa minden x csúcsára fennáll, hogy

$$\frac{1}{2} < \frac{súly(bal(x))}{súly(jobb(x))} < 2.$$

    Bizonyítsuk be, hogy ez csakis egy teljes fa lehet, azaz ha k szintje van, akkor a csúcsok száma $2^k - 1$. *(Ez nem kifejezetten keresőfázós feladat, de úgy általában érdekes.)*