Algel I. gyakorlat

Barátkozás a tárggyal és egymással

2009. február 10/12.

18. **[Vizsga: 2007. június 19.] Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!**

$$f_1(n) = 2^{100n} - 2^{50n}, \quad f_2(n) = 2007n^3, \quad f_3(n) = 3^{3n}$$

Megsejtjük, hogy $f_2(n) = O(f_3(n)) = O(f_1(n))$. Most bebizonyítjuk, definíció szerint.

$f_2(n) = O(f_3(n))$: $\exists c > 0, n_0 > 0$, hogy $\forall n > n_0$ $2007n^3 \leq c(3^{3n})$. Ezt átalakítva, konstanst hozzávéve c-hez $n^3 \leq c27^n$, ami triviálisan igaz akár $c = 1, n_0 = 1$-re is.

$f_3(n) = O(f_1(n))$: $\exists c > 0, n_0 > 0$, hogy $\forall n > n_0$ $3^{3n} \leq c(2^{100n} - 2^{50n})$. Írhatjuk, hogy $3^{3n} \leq c(2^{100n} - 2^{50n}) \leq c(2^{100n})$, és mondjuk logaritmust vonva $n \log 27 \leq c + n \log 2^{100}$, amiből $n(\log 27 - \log 2^{100}) \leq c$. Itt a bal oldal negatív, ezért ez bármilyen c-re és n_0-ra igaz.

Számolás nélkül, nem definíció szerint nem lehet max. pontot kapni!

19. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy

   (a) **van olyan x bemenet, amin a lépésszáma $|x|^3$?**
   Természetesen lehet ilyen, pl. ha $|x| < n_0$.

   (b) **minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ?**
   Lehet, hiszen $2007|x| = O(|x|) = O(|x| \log |x|)$.

   (Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)

20. **[Vizsga: 2007. június 5.] Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n = 2k > 4$ páros számra $L(2k) \leq L(2k-2) + 1$ teljesül, és hogy $L(4) = 10$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n)$?**
Nem következik, hiszen a páratlan n-ekről semmit sem tudunk, ott lehet akár 2^n is.