

# Algel XIV. gyakorlat (az utolsó)

$P?NP$ , könnyes búcsú

2009. május 12/14.

1. Mi az alábbi problémák bonyolultsága, ha az input egy  $G(V, E)$  gráf ( $|V| = n, |E| = e$ )? Természetesen bizonyítsuk is be!
  - (a) Van-e  $G$ -ben egy legalább 15 pontú teljes részgráf?  $P$ -beli, az összes lehetséges részgráf  $O(\binom{n}{15}) = O(n^{15})$ .
  - (b) Van-e  $G$ -ben egy legalább  $k$  pontú teljes részgráf? ( $k$  az input része.)  $NP$ -teljes, ez a  $k$ -SZÍN.
  - (c) Van-e  $G$ -ben legalább  $n/100$  hosszúságú kör?  $NP$ -teljes, tanú egy ilyen kör (poli ell, poli méret), valamint van H-körről Karp-redukció ( $99n$  izolált pont).
  - (d) Van-e  $G$ -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 2? Ez a H-út.
  - (e) Van-e  $G$ -ben olyan feszítőfa, amelyben a maximális fokszám legfeljebb 3?  $NP$ -teljes, tanú egy ilyen feszfa, valamint előzőt erre vissza lehet vezetni (minden ponthoz egy elsőfokú pont).
2. [Vizsga: 2007. június 12.] Tudjuk, hogy a síkgráfokból álló nyelv  $P$ -ben van. Legyen a SÍK-MAXKLIKK nyelv a következő:

$$\{(G, k) \mid G \text{ egy síkgráf, amiben van } k \text{ pontú klikk}\}$$

Mutassa meg, hogy ez a nyelv  $NP$ -teljes, vagy mutassa meg, hogy a nyelv  $P$ -ben van.

$P$ -beli. Először ellenőrizzük a síkgráfságot (polinom). Ha nem, akkor nincs a nyelvben. Ha igen, és  $k > 4$ , akkor szintén nem, hiszen  $K_5$  biztos nincs benne. Egyébként legfeljebb  $O(\binom{n}{4}) = O(n^4)$  lehetőséget kell végignézni.

3. [Vizsga: 2008. június 10.] Tegyük fel, hogy  $P \neq NP$ . Az alábbi feltételek közül melyikből következik és melyikből nem következik hogy az  $X$  eldöntési probléma nem  $P$ -beli?
  - (a) Egy  $NP$ -teljes  $Y$  problémára  $X$  Karp-redukálható. Ez nem mond semmit  $X$ -ről, hiszen  $P \subseteq NP$ , és minden  $NP$ -beli visszavezethető tetszőleges  $NP$ -teljesre.
  - (b) Egy  $NP$ -teljes  $Y$  probléma Karp-redukálható  $X$ -re. Ekkor  $X$   $NP$ -nehéz, ami  $X \in P$  esetén  $P = NP$ -t jelente, amit feltettünk hogy nem így van. Így  $X$  nem  $P$ -beli.
  - (c) az  $X$  probléma  $NP$ -beli. Ettől még lehet  $P$ -ben is, hiszen  $P \subseteq NP$ .