Algel XIII. gyakorlat

$P?NP$, és a T-betűs szó

2009. május 5/7.

3. **Adjunk Karp-redukciót a 3-SZÍN nyelvről a 4-SZÍN nyelvre!**
Adott G gráf, amiről el kell dönteni, hogy színezhető-e 3 színnel. Ezt kell visszavezetni 4 színnel színezésre. Vegyünk fel egy új pontot (v), ezt kössük hozzá az összes G-beli ponthoz. Legyen ez a gráf G'. Állítás: $G \in 3SZIN \Leftrightarrow G' \in 4SZIN$. $G \in 3SZIN \Rightarrow G' \in 4SZIN$: vegyük G egy 3 színnel színezését, és adjuk v-nek a negyedik színt G'-ben. Ez a színezés jó lesz. $G \in 4SZIN \Rightarrow G' \in 3SZIN$: vegyük G' egy 4 színnel színezését. Ekkor v színe különbözik az összes csúcs színétől, így a többi csúcs pont G egy jó 3 színnel színezése szerint van színezve. Az átalakítás polinomiális.

6. **Bizonyítsuk be, hogy P-beli az olyan négy színnel színezhető G gráfokból álló nyelv, melyekre igaz, hogy G csúcsai kiszínezhetők a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék!**
A piros és kék színeket legfeljebb $n\binom{n-1}{2}$ féle módon oszthatjuk ki, ami polinomiális. Minden kiosztáshoz a maradék gráfot két színnel kell színezni, ami P-beli feladat. Így polinomszor kell egy polinom költségű algoritmust futtatni, ami polinom időben megy.

7. **Bizonyítsuk be a következő problémáról, hogy NP-teljes, vagy azt, hogy P-beli!**

$$L = \{G \mid G \text{ irányítatlan teljes gráf, amiben van Hamilton-kör}\}$$

P-beli, mert polinom időben ellenőrizhetjük, hogy teljes-e a gráf. Ha nem, akkor a válasz nem, ha pedig igen, akkor mindenképp van benne Hamilton-kör, így a válasz igen.

8. **[Vizsga: 2007. május 29.] A G irányítatlan gráf minden x pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet és vagy lássa be róla, hogy P-ben van vagy azt, hogy NP-teljes.**
A nyelv:

$$L = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan csúcssúlyozott teljes gráf, amiben van legfeljebb } k \text{ levélsúlyú feszítőfa}\}$$

Ez NP-teljes. NP-beli, mert egy jó tanú egy ilyen feszítőfa (ellenőrzés polinom időben megy, a mérete is polinom). Adunk egy H-út$\prec$ L Karp-redukciót. Ha egy G gráfban Hamilton-utat keresünk, akkor minden csúcshoz rendeljünk 1 súlyt, és az így keletkezett G' gráfban keressünk legfeljebb 2 levélsúlyú feszítőfát! Állítás: $G \in H-ut \Leftrightarrow (G', 2) \in L$. $G \in H-ut \Rightarrow (G', 2) \in L$: G egy Hamilton-útja pont egy két levelű, 2 súlyú feszítőfa G'-ben. $(G', 2) \in L \Rightarrow G \in H-ut$: egy ilyen feszítőfának pontosan 2 levele kell, hogy legyen (ha több lenne, nagyobb lenne a súlya, egy fában pedig mindig van legalább 2 levél). Ez pedig pont egy olyan utat jelent, ami tartalmazza a gráf összes csúcsát, tehát G egy Hamilton-útját. A csúcsoknak súlyt adni lehet polinom időben.

9. **[Vizsga: 2007. június 12.] Igazolja, hogy ha a 3SZÍN nyelv benne van $coNP$-ben, akkor $NP = coNP$.**
Tudjuk, hogy 3SZÍN NP-teljes, tehát tetszőleges NP-beli probléma visszavezethető rá. A Karp-redukció viszont nem függ az igen vagy nem választól (acsa feltétel van benne), így a feltétel szerint minden $coNP$-beli probléma is visszavezethető rá, így $coNP \subseteq NP$. Ugyanez a gondolatmenet a másik irányba is igaz, így $NP \subseteq coNP$, tehát $NP = coNP$.