# Algel XIII. gyakorlat

## $P?NP$, és a T-betűs szó

## 2009. május 5/7.

### Hasznos tudnivalók

- Eldöntési problémákról beszélünk!
- $P \subseteq NP$, $P \subseteq coNP$. Tehát ha valami $P$-beli, akkor **biztos**, hogy $NP$-beli és $coNP$-beli is!!!
- **$P$-beliség bizonyítása**: adunk egy polinom idejű algoritmust. Nem redukálunk, nem fejtegetjük $P$ és $NP$ viszonyát. Nem fontos a hatékonyság, $n^{100}$ is polinomiális!
- **$NP$-beliség bizonyítása**: tanú mutatása, tanú mérete polinomiális, ellenőrzés polinomiális. **Nem kell algoritmus a tanú előállítására**!!! A tanú lehet pofátlanul egyszerű. Nem redukálunk, nem fejtegetjük $P$ és $NP$ viszonyát.
- **$NP$-teljesség bizonyítása** $L$ problémára:
  1. $L$ $NP$-beliségének bizonyítása.
  2. $L$ $NP$-nehézségének bizonyítása:
     (a) Találunk egy vele kapcsolatba hozható problémát, ami ismerten $NP$-teljes, ez legyen $I$.
     (b) Bemutatunk egy $I \prec L$ Karp-redukciót, az irány **eszméletlenül fontos**! Azaz van egy $I$-beli kérdésünk (**nem az aktuális probléma**, hanem egy ismerten nehéz!), azt átalakíthatjuk, és átalakítva bedobjuk az $L$-et (az egyelőre ismeretlen nehézségű problémát) megoldó fekete dobozba, és ez a válasz lesz az eredeti kérdésünkre is a válasz! Tehát az átalakítást kell megadni, arra jár a pont.
     (c) Bizonyítjuk a Karp-redukció helyességét. Azaz, ha $f$ az átalakítás: $x \in I \Leftrightarrow f(x) \in L$ a bizonyítandó. Figyelem! **Két bizonyítás**, akkor és csak akkor, „$\Leftrightarrow$”!
     (d) Belátjuk, hogy $f$ polinom időben elvégezhető.

### Feladatok

1. Lássuk be, hogy az alábbi problémák NP-beliek! Melyekről tudjuk megmondani, hogy coNP-ben vannak? Melyekről, hogy P-ben?
   (a) $L_1 = \{(G, k) \mid G \text{ gráf kiszínezhető } k \text{ színnel}\}$
   (b) $L_2 = \{(G, k) \mid G \text{ páros gráfban van } k \text{ élből álló párosítás}\}$
   (c) $L_3 = \{G \mid G \text{ irányítatlan gráfban van Euler-kör}\}$
   (d) $L_4 = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan gráfban van } k \text{ független pont}\}$
   (e) $L_5 = \{G \mid G \text{ irányítatlan gráf, van benne } \cancel{\text{legalább}} \text{ pontosan 100 élből álló kör}\}$
   (f) $L_6 = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan gráf, van benne legalább } k \text{ élből álló kör}\}$
   (g) $L_7 = \left\{(s_1, s_2, \ldots, s_n, b) \mid \forall i \; s_i, b \in \mathbb{Z}^+; \exists j_1, \ldots, j_k \; (1 \leq k \leq n) : \sum_{l=1}^{k} s_{j_l} = b\right\}$
2. Bizonyítsuk be, hogy a leghosszabb út meghatározása egy irányított, élsúlyozott $G$ gráfban $NP$-teljes! (Pontosabban az ehhez tartozó eldöntési probléma.) Másképpen: bizonyítsuk be, hogy

$$L = \{(G, k) \mid G \text{ irányítatlan, élsúlyozott gráf, van benne legalább } k \text{ súlyú út}\}$$

   $NP$-teljes!

3. Adjunk Karp-redukciót a 3-SZÍN nyelvről a 4-SZÍN nyelvre!

4. A $G$ irányítatlan gráf minden $v$ pontjához tartozik egy $s(v)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Adjuk meg a feladathoz tartozó $L$ nyelvet, majd adjunk Karp-redukciót a H-út nyelvről $L$-re!

5. Tegyük fel, hogy van egy olyan $F$ eljárásunk, ami egy input $G$ gráfra és $k$ számra 1 lépés alatt megmondja, hogy van-e $G$-ben legalább $k$ méretű független ponthalmaz. Tervezzünk olyan algoritmust, ami polinomidőben

   (a) meghatározza $\alpha(G)$-t!

   (b) talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt!

6. Bizonyítsuk be, hogy $P$-beli az olyan négy színnel színezhető $G$ gráfokból álló nyelv, melyekre igaz, hogy $G$ csúcsai kiszínezhetők a piros, zöld, sárga, kék színekkel úgy, hogy pontosan egy csúcs legyen piros és pontosan két csúcs legyen kék!

7. Bizonyítsuk be a következő problémáról, hogy $NP$-teljes, vagy azt, hogy $P$-beli!

$$L = \{G \mid G \text{ irányítatlan teljes gráf, amiben van Hamilton-kör}\}$$

8. **[Vizsga: 2007. május 29.]** A $G$ irányítatlan gráf minden $x$ pontjához tartozik egy $s(x)$ súly. Célunk, hogy olyan feszítőfát találjunk a gráfban, amiben a levelekhez tartozó súlyok összege minimális. Fogalmazza meg a feladathoz tartozó nyelvet és vagy lássa be róla, hogy $P$-ben van vagy azt, hogy $NP$-teljes.

9. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Igazolja, hogy ha a 3SZÍN nyelv benne van $coNP$-ben, akkor $NP = coNP$.