

Algel X. gyakorlat

Most már mélységében is bejárjuk a gráfokat, és DAG!

2009. április 14/16.

4. A $G(V, E)$ összefüggő, irányított gráf minden éle az $1, 2, \dots, k$ számok valamelyikével van súlyozva. Egy út értéke legyen az úton található élek súlyainak maximuma. Adjunk $O(|E| \log k)$ futásidejű algoritmust az adott $x, y \in V$ csúcsok közti legkisebb súlyú út értékének meghatározására!

Adott i számra meg tudjuk nézni, hogy x és y csúcs között van-e legfeljebb i súlyú út, azaz az i -nél nem nagyobb súlyú élek kihagyásával x és y egy komponensben van-e. A legkisebb olyan i szám, amire x és y egy komponensben vannak, pont a minimális súlyú út súlya. Mivel csak $1, \dots, k$ közötti élsúlyaink vannak, bináris kereséssel meg tudjuk keresni a megfelelő i -t. A komponensbe tartozás ellenőrzése mehet bejárással, ami $O(|E| + |V|)$, viszont itt az összefüggőség miatt $|V| = O(|E|)$. Összesen tehát a lépésszám $O(|E| \log k)$.

5. [ZH: 2007. április 27.] Tekintsük az olyan G irányított gráfokat, amelyekben ha eltekintünk az élek irányításától, akkor a kapott irányítatlan G' gráf összefüggő. A G gráf egy mélységi bejárásánál maximálisan hány olyan csúcs lehet, amelyre a mélységi és a befejezési szám megegyezik?

n , ilyen például egy irányított út, ahol pont az iránnyal ellentétesen vesszük a csúcsokat. Több nem lehet, hiszen n csúcsa van a gráfnak.

6. [ZH: 2007. április 27.] Az $n \times n$ méretű tábla minden mezőjére egy pozitív egész szám van írva, az i -edik sorának j -edik elemére $A[i, j]$, ahol $0 \leq i, j < n$. Feladat, hogy az első oszlopból eljussunk az utolsó oszlopba úgy, hogy egy lépésben mindig a következő oszlopba lépünk, és azon belül, ha az i -edik sorban voltunk, akkor a következő lépésben vagy az $(i - 1) \pmod n$, vagy az i , vagy az $(i + 1) \pmod n$ számú sorba kerülhetünk. Adjunk $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az első oszlop melyik eleméből induljunk, ha azt akarjuk, hogy a bejárt mezőkön lévő számok összege minimális legyen (az utolsó oszlop bármelyik mezője lehet az utolsó olyan mező, amire rálépünk).

A tábla mezőit vesszük egy gráf csúcsainak, az élek a megengedett lépéseket jelölik, súlyuk a mező súlya, ahonnan indulnak. Legyen egy forrás, ami az összes első oszlopbelihez hozzá van kötve 0 súllyal, és egy nyelő, amibe az utolsó oszlopból vezetnek élek. Így egy megengedett lépkedés pont egy útnak fog megfelelni a gráfban a forrástól a nyelőig. A gráf DAG, a lépések definíciója miatt. $|V| = O(n^2)$, $|E| = O(n^2)$ (minden csúcsból legfeljebb 3 él indul, a forrásból pedig n db), így a legkisebb összegű lépkedés pont egy legrövidebb út a forrásból a nyelőbe, ami $O(|V| + |E|) = O(n^2)$ lépésben megvan.

8. [Vizsga: 2008. május 27.] Éllistával adott egy n pontú e élű irányított gráf. Azt szeretnénk tudni, hogy van-e benne olyan minden pontot tartalmazó részgráf, ami egy, a gyökerétől a levelek felé irányított fa. Adjunk $O(ne + n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami ha van, talál egy ilyen részgráfot.

Minden csúcsból egy mélységi bejárással ellenőrizzük, hogy ilyen-e. Ha találunk, akkor megállunk, ha nem, akkor pedig nem is lehet (különben valamelyik bejárás megadta volna). Ez összesen $O(n(n + e)) = O(ne + n^2)$.

9. [Vizsga: 2007. június 12.] Egy számítógéphálózatban n számítógép van. Minden olyan eseményt, hogy az i -edik gép üzenetet küld a j -ediknek (i, j, t) formában feljegyezzük, ahol a t egész szám az üzenet küldésének időpontját jelöli. Ugyanabban a t időpontban egy gép több gépnek is küldhet üzenetet. Ha a t időpontban az i -edik gép vírusos volt, akkor egy (i, j, t) üzenet hatására a j -edik gép megfertőződhet, ami azt jelenti, hogy a $t + 1$ időponttól kezdve már a j -edik gép is vírusos lehet.

Legyen adott az (i, j, t) hármasoknak egy m hosszú listája, valamint x, y és $t_0 < t_1$ egész számok. Azt kell eldöntenünk, hogy ha az x -edik gép a t_0 időpontban vírusos volt, akkor lehet-e emiatt az y -edik gép a t_1 időpontban vírusos. Adjon algoritmust, ami ezt a kérdést $O((t_1 - t_0)n + m)$ lépés után megválaszolja.

Vegyünk fel egy gráfot, csúcsai a számítógépek minden időpillanatban t_0 és t_1 között, élei (írányítottak) az üzenetek. Vegyünk fel még éleket az ugyanahhoz a géphez tartozó szomszédos időpontok között is előrefele! Ebben a gráfban az x géppel pontosan azok vannak egy komponensben, akik lehetnek vírusosak (ezt kicsit indokolni kell). Így x -ből egy bejárást indítva megtaláljuk a kérdéses gépeket. $|V| = O(n(t_1 - t_0))$, $|E| = O(n(t_1 - t_0) + m)$ (saját élek és legfeljebb m üzenet), így a bejárás lépésszáma $O((t_1 - t_0)n + m)$.

11. **Bizonyítsuk be, hogy minden $G = (V, E)$ irányított gráf felbontható két DAG-ra; pontosabban az élhalmazának van olyan E_1, E_2 partíciója ($E = E_1 \cup E_2$ és $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), hogy a $G_1 = (V, E_1)$ és a $G_2 = (V, E_2)$ gráfok DAG-ok!**

Javaslat: indukció csúcsszámra.