Algel X. gyakorlat

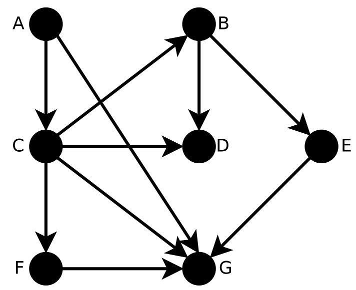
Most már mélységében is bejárjuk a gráfokat, és DAG!

2009. április 14/16.

1. Adott a G irányítatlan gráf a következő éllistával: $a[b,c]$, $b[a,d]$, $c[a,d]$, $d[b,c,e,f]$, $e[d,f,g]$, $f[d,e,g,h]$, $g[e,f,h]$, $h[f,g]$. Keressünk G-ben a-ból kiinduló mélységi feszítőfát! (A mélységi- és befejezési számok feltüntetésével, az élek osztályozásával.)

2. A 6 pontú G gráf csúcsait jelölje x,y,z,u,v,w. A gráf egy mélységi bejárásánál a mélységi, ill. a befejezési számok a következők: $x: 1,6$; $y: 2,4$; $z: 6,5$; $u: 3,3$; $v: 4,1$; $w: 5,2$. Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit! Rekonstruálható-e G az előző számok ismeretében?

3. Mélységi bejárással győződjünk meg, hogy az alábbi gráf egy DAG, majd határozzuk meg csúcsainak egy topologikus sorrendjét!



4. A $G(V,E)$ összefüggő, irányított gráf minden éle az $1,2,\ldots k$ számok valmelyikével van súlyozva. Egy út értéke legyen az úton található élek súlyainak maximuma. Adjunk $O(|E|\log k)$ futásidejű algoritmust az adott $x,y \in V$ csúcsok közti legkisebb súlyú út értékének meghatározására!

5. **[ZH: 2007. április 27.]** Tekintsük az olyan G irányított gráfokat, amelyekben ha eltekintünk az élek irányításától, akkor a kapott irányítatlan G' gráf összefüggő. A G gráf egy mélységi bejárásánál maximálisan hány olyan csúcs lehet, amelyre a mélységi és a befejezési szám megegyezik?

6. **[ZH: 2007. április 27.]** Az $n \times n$ méretű tábla minden mezőjére egy pozitív egész szám van írva, az i-edik sorának j-edik elemére $A[i,j]$, ahol $0 \le i,j < n$. Feladat, hogy az első oszlopból eljussunk az utolsó oszlopba úgy, hogy egy lépésben mindig a következő oszlopba lépünk, és azon belül, ha az i-edik sorban voltunk, akkor a következő lépésben vagy az $(i-1) \pmod n$, vagy az i, vagy az $(i+1) \pmod n$ számú sorba kerülhetünk. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza, hogy az első oszlop melyik eleméből induljunk, ha azt akarjuk, hogy a bejárt mezőkön lévő számok összege minimális legyen (az utolsó oszlop bármelyik mezője lehet az utolsó olyan mező, amire rálépünk).

7. **[ZH: 2008. március 28.]** Egy $n \times n$ méretű táblázat minden eleme egy egész szám. A táblázat bal alsó sarkából akarunk eljutni a jobb felső sarkába úgy, hogy egy lépésben a táblázatban vagy felfelé vagy jobbra egyet lépünk. Azt szeretnénk, hogy a lépegetés során látott elemek növekvő sorrendben kövessék egymást. Egy ilyen út értéke a benne szereplő számok összege. Adjon $O(n^2)$ futási idejű algoritmust, ami meghatározza, hogy az adott táblázatban a szabályok szerinti utak értékei között mekkora a legnagyobb!

8. **[Vizsga: 2008. május 27.]** Éllistával adott egy n pontú e élű irányított gráf. Azt szeretnénk tudni, hogy van-e benne olyan minden pontot tartalmazó részgráf, ami egy, a gyökerétől a levelek felé irányított fa. Adjon $O(ne+n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami ha van, talál egy ilyen részgráfot.

9. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Egy számítógéphálózatban n számítógép van. Minden olyan eseményt, hogy az i-edik gép üzenetet küld a j-ediknek (i, j, t) formában feljegyezünk, ahol a t egész szám az üzenet küldésének időpontját jelöli. Ugyanabban a t időpontban egy gép több gépnek is küldhet üzenetet. Ha a t időpontban az i-edik gép vírusos volt, akkor egy (i, j, t) üzenet hatására a j-edik gép mefertőződhet, ami azt jelenti, hogy a $t+1$ időponttól kezdve már a j-edik gép is vírusos lehet. Legyen adott az (i, j, t) hármasoknak egy m hosszú listája, valamint x, y és $t_0 < t_1$ egész számok. Azt kell eldöntenünk, hogy ha az x-edik gép a t_0 időpontban vírusos volt, akkor lehet-e emiatt az y-adik gép a t_1 időpontban vírusos. Adjon algoritmust, ami ezt a kérdést $O((t_1 - t_0)n + m)$ lépés után megválaszolja.

10. **[Vizsga: 2007. június 19.]** Egy előre rögzített útvonalon úgy indulunk el, hogy az autó L literes tankja tele van. Úticélunkhoz úgy akarunk eljutni, hogy legalább egy fél tanknyi benzin maradjon az autóban. Tudjuk, hogy az utunkba eső n benzinkút közül melyikben mennyibe kerül a benzin, továbbá, hogy két szomszédos benzinkút között, valamint a kiindulóponttól az első benzinkútig, illetve az utolsó benzinkúttól a célunkig mennyi benzint fogyaszt az autó. Az egyszerűség kedvéért ha megállunk egy benzinkútnál, akkor mindig tele tankolunk. Adjon algoritmust, ami $O(Ln^2)$ lépésben megmondja, hogy hol álljunk meg tankolni ha azt akarjuk, hogy utunk során a benzinköltség minimális legyen. *(Javítási útmutatóban: ELNEZEST, a feladatba bele akartam irni, de kimaradt, hogy a fogyasztas mindig egesz liter. Ha valaki megoldotta e nelkul (es meg jobb is a lepesszama), annak orulunk. Ha valaki feltette, hogy minden egesz, annak is orulunk, mert ezt akartuk es meg gondolatot is tud olvasni.)*

11. Bizonyítsuk be, hogy minden $G = (V, E)$ irányított gráf felbontható két DAG-ra; pontosabban az élhalmazának van olyan E_1, E_2 partíciója ($E = E_1 \cup E_2$ és $E_1 \cap E_2 = \emptyset$), hogy a $G_1 = (V, E_1)$ és a $G_2 = (V, E_2)$ gráfok DAG-ok!