Algel VII. gyakorlat

2008. március 26.

2-3 fák, B-fák

- az elemeket a levelekben tároljuk, balról jobbra növekvő sorrendben, egy levél egy elemet (rekordot) tartalmaz
- a belső csúcsokban csak kulcsokat és mutatókat tárolunk, minden csúcsnak legalább 2, legfeljebb 3 fia van (B_m-fáknál $\lceil \frac{m}{2} \rceil$ ill. m, kivéve a gyökér, ahol a triviális esetet leszámítva legalább 2 fiúnak kell lenni)
- a fa levelei a gyökértől egyforma távolságra vannak

Tételek:

1. Ha egy 2-3 fának l szintje van, akkor a levelek száma legalább 2^{l-1}.
2. Ha egy 2-3 fában n elemet tárolunk, akkor a szintjeinek száma legfeljebb $\log_2 n + 1$.
3. Ha egy B_m-fában n elemet tárolunk, akkor a szintjeinek száma legfeljebb
$$\frac{\log_2 n - 1}{\log_2 \lceil \frac{m}{2} \rceil} + 2.$$

Feladatok

1. Építsünk 2-3 fát a következő elemekből, ebben a sorrendben: D, B, E, A, C, F, G!
2. Most töröljük ezeket az elemeket: D, B!
3. Egy 2-3 fának 10^9 levele van. Mekkora a szintjeinek minimális, ill. maximális száma?
4. És ha a fenti esetben B_{20} fát használnánk?
5. Az $[1, 178]$ intervallum összes egészei egy 2-3 fában helyezkednek el. Tudjuk, hogy a gyökérben két kulcs van, és ezek közül az első 17. Mi lehet a második? Miért?
6. Az S_1 és S_2 kulcshalmazokat kiegészített 2-3 fákban tároljuk. Ezek az eredeti 2-3 fától annyiban különböznek csak, hogy minden csúcsban nyilván van tartva az onnan induló részfa magassága. Tudjuk továbbá, hogy az S_1-beli kulcsok mind kisebbek, mint az S_2-beliek. Javasoljunk hatékony algoritmust a két fa egyesítésére!
7. **[ZH: 2004. március 29.]** Egy kezdetben üres 2-3 fába az $1, 2, \ldots, n$ számokat szúrtuk be ebben a sorrendben. Bizonyítsa be, hogy a keletkezett fában a harmadfokú csúcsok száma $O(\log n)$.
8. **[ZH: 2003. március 31.]** Egy 2-3 fába egymás után 1000 új elemet illesztettünk be. Mutassa meg, hogy ha ennek során egyszer sem kellett csúcsot szétvágni, akkor a beillesztések sorozata előtt már legalább 2000 elemet tároltunk a fában.

9. Egy fában az x csúcs *súlya* legyen x leszármazottainak száma. Egy bináris fát szigorúan binárisnak mondunk, ha a levelek kivételével minden csúcsnak pontosan 2 fia van. Tegyük fel, hogy egy szigorúan bináris fa minden x csúcsára fennáll, hogy
$$\frac{1}{2} < \frac{súly(bal(x))}{súly(jobb(x))} < 2.$$
Bizonyítsuk be, hogy ez csakis egy teljes fa lehet, azaz ha k szintje van, akkor a csúcsok száma $2^k - 1$. *(Ez nem 2-3 fás feladat, de úgy általában érdekes.)*