

# Algel VI. gyakorlat

2008. március 19.

## Piros-fekete fák

- minden nem levél(=belső) csúcsnak két fia van
- elemeket a belső csúcsokban tárolunk (levélben nem)
- teljesül a keresőfa-tulajdonság
- a fa minden csúcsa piros vagy fekete
- a gyökér fekete
- a levelek feketék
- piros csúcs mindkét gyereke fekete
- minden  $v$  csúcsra igaz, hogy az összes  $v$ -ből levélbe vezető úton ugyanannyi fekete csúcs van.

Tételek:

1. Egy piros-fekete fa minden  $v$  csúcsára teljesül, hogy

$$\frac{m(v)}{2} \leq fm(v) \leq m(v).$$

2. Egy piros-fekete fában az  $F_v$  részfa belső csúcsainak száma legalább  $2^{fm(v)} - 1$ .
3. Ha egy piros-fekete fában  $n$  elemet tárolunk, akkor a fa magassága legfeljebb  $2 \log(n + 1)$ .

## Feladatok

1. Építsünk piros-fekete fát a következő sorrendben érkező kulcsokkal: 7, 8, 2, 10, 5, 6!
2. Az előbb felépített fából töröljük a következő csúcsokat: 7, 10, 8, 2!
3. (a) Lehet-e tetszőleges (adott) kulcshalmaz esetén olyan piros-fekete fát építeni, hogy az azonos szinten lévő elemek azonos színűek legyenek?  
(b) Van-e olyan piros-fekete fa, ami nem így néz ki?
4. Egy piros-fekete fába egy új elemet illesztettünk be az előadáson tanult módszerrel. Az eredményképpen kapott piros-fekete fa magassága nagyobb, mint az eredetié. Milyen forgatást alkalmazhattunk?
5. Határozzuk meg a (levelek nélkül) 8 magasságú piros-fekete fák minimális, illetve maximális csúcsszámát!

6. Adott egy  $n$  pontú piros-fekete fa. Adjunk egy  $O(n)$  lépésszámú algoritmust az  $1, 2, \dots, n$  számok egy olyan sorrendjének meghatározására, amely esetén a piros-fekete fa építő algoritmus a megadott fát hozza létre, mégpedig forgatás nélkül!
7. Adjuk meg az  $1, 2, \dots, 6$  számoknak egy olyan sorrendjét, amikor a piros-fekete fát építő algoritmus
- (a) alkalmaz dupla forgatást
  - (b) nem alkalmaz forgatást
8. **[ZH: 2007. április 27.]** Egy piros-fekete fában lehetséges-e, hogy a piros-fekete tulajdonság megsértése nélkül
- (a) néhány fekete csúcsot átváltoztathatunk pirosra?
  - (b) valamelyik (csak egy) fekete csúcsot átváltoztathatjuk pirosra?
- (Mást nem változtatunk a fán.)
9. **[Vizsga: 2007. június 5.]** Adott egy  $n$  csúcsú és egy  $k$  csúcsú piros-fekete fa. A két fában tárolt összes elemből  $O(n+k)$  lépésben készítsen rendezett tömböt.