Algel I. gyakorlat

2008. február 13.

1. Tegyük fel, hogy van egy számítógépes programunk, ami egy k méretű feladaton a jelenlegi gépünkön 1 nap alatt fut le. Beszereztünk egy százszor gyorsabb számítógépet. Ugyanazon programmal mekkora feladatot lehet az új gépen egy nap alatt megoldani, ha a program lépésszáma n méretű feladat esetén
   (a) n-nel
   (b) n^3-bel
   (c) 2^n-nel arányos?

2. Bizonyítsuk be, hogy
   (a) $\log_2 f(n) = \Theta(\log_{100} f(n)) \quad (f(n) > 0)$,
   (b) $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_0 \quad (a \neq 0) \quad \Rightarrow \quad f(n) = \Theta(n^k)$,
   (c) $2^{n+1} = O(2^n)$, de $2^{2n} \neq O(2^n)$,
   (d) $\max(f(n) + g(n)) = \Theta(f(n) + g(n) \quad (f(n), g(n) > 0)$!

3. Igaz-e, hogy
   (a) ha $f = O(g)$ és $g = O(h)$, akkor $f = O(h)$;
   (b) ha $f = \Omega(g)$ és $g = \Omega(h)$, akkor $f = \Omega(h)$?

4. Tudjuk, hogy $f(x) = O(h(x))$ és $g(x) = O(h(x))$. Igaz-e, hogy
   (a) ha $h(x) = 3x$, akkor $f(g(x)) = O(h(x))$;
   (b) $f(g(x)) = O(h(x))$ $\forall h$ függvényre?

5. Állapítsuk meg, hogy az alábbi függvények esetén mely párokra teljesül, hogy $f_i(n) = O(f_j(n))$!

$$f_1(n) = 11n^2, \quad f_2(n) = 8n^2 \log n, \quad f_3(n) = n^2 + 100000$$

6. Az alábbi függvényeket rendezzük olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = 8n^{2.5}, \quad f_2(n) = 5\sqrt{n} + 1000n, \quad f_3(n) = 2^{\log^2 n}, \quad f_4(n) = 2008n^2 \log n$$

7. Az $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n^2)$. Lehetséges-e, hogy
   (a) $\forall n$ hosszú bemeneten $O(n)$ lépést használ?
   (b) $\exists x$, hogy az x bemeneten az algoritmus lépésszáma $10|x|^2 \log |x| - 800$ (ahol $|x|$ az x bemenet hosszát jelöli)?

8. **[Vizsga: 2007. június 19.]** Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = 2^{100n} - 2^{50n}, \quad f_2(n) = 2007n^3, \quad f_3(n) = 3^{3^n}$$

9. **[Vizsga: 2007. június 12.]** Egy $\mathcal{A}$ algoritmusról azt tudjuk, hogy n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy

   (a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma x^3?

   (b) minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ? (Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)

10. **[Vizsga: 2007. június 5.]** Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n = 2k > 4$ páros számra $L(2k) \leq L(2k-2) + 1$ teljesül, és hogy $L(4) = 10$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n)$?