

Gráfszínezési problémák és ütemezési alkalmazásaik

Marx Dániel

Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi és Információelméleti tanszék
dmarx@cs.bme.hu

Neumann János Doktoranduszi Konferencia
Budapest, 2003

Gráfok színezése

- **Bemenet:** Egy $G(V, E)$ gráf
- **Feladat:** rendeljünk a csúcsokhoz színeket úgy, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.
- **Cél:** Próbáljuk a feladatot minél kevesebb szín felhasználásával megoldani.

Gráfok színezése

- **Bemenet:** Egy $G(V, E)$ gráf
- **Feladat:** rendeljünk a csúcsokhoz színeket úgy, hogy szomszédos csúcsok színe különböző legyen.
- **Cél:** Próbáljuk a feladatot minél kevesebb szín felhasználásával megoldani.

Minimális színszám meghatározása **NP**-nehéz.

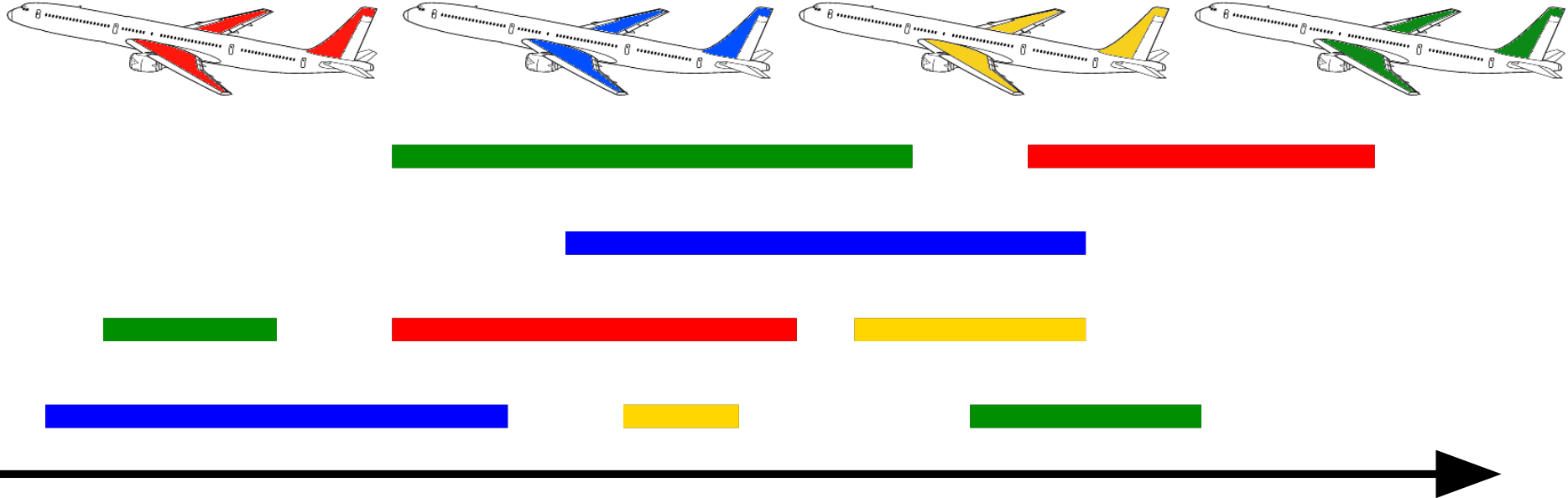
Intervallumgráfok

Alkalmazás: repülőgépek hozzárendelése járatokhoz.



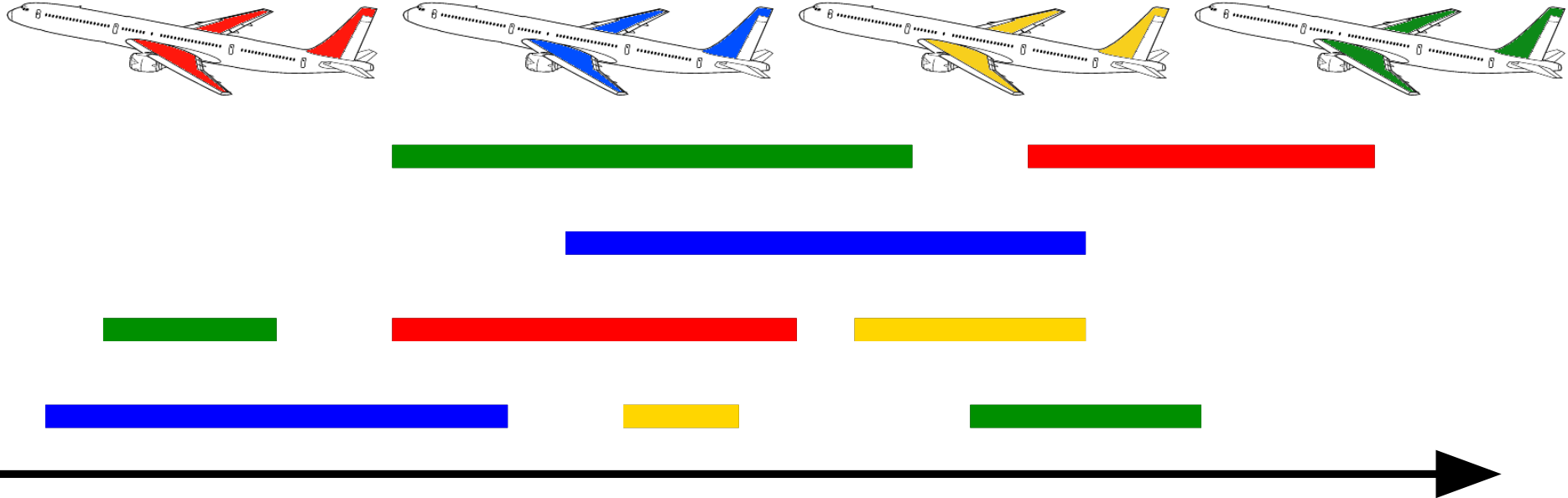
Intervallumgráfok

Alkalmazás: repülőgépek hozzárendelése járatokhoz.



Intervallumgráfok

Alkalmazás: repülőgépek hozzárendelése járatokhoz.



Intervallumgráfok színezésére ismert lineáris idejű algoritmus.

Színezésbővítés

A **színezésbővítés** problémában a gráf néhány csúcsa előre ki van színezve, ezt kell befejezni adott számú szín felhasználásával.

Alkalmazás: bizonyos járatokhoz már rendeltünk repülőgépeket (megváltoztathatatlanul).

- Intervallumgráfokon a színezésbővítés **NP**-teljes. [Biró, Hujter, Tuza 1992]
- A probléma **NP**-teljes marad akkor is ha, minden intervallum hossza egységnyi. [M. 2002]

Egy speciális eset

Minden szín **csak egyszer** szerepel a kezdeti színezésben. Ekkor a probléma polinom időben megoldható **intervallumgráfokon**. [Biró, Hujter, Tuza 1992]

Alkalmazás: Minden repülőgéphez van egyetlen karbantartásra kijelölt időszak amikor nem repülhet (más megkötés nincs).

Egy speciális eset

Minden szín **csak egyszer** szerepel a kezdeti színezésben. Ekkor a probléma polinom időben megoldható **intervallumgráfokon**. [Biró, Hujter, Tuza 1992]

Alkalmazás: Minden repülőgéphez van egyetlen karbantartásra kijelölt időszak amikor nem repülhet (más megkötés nincs).

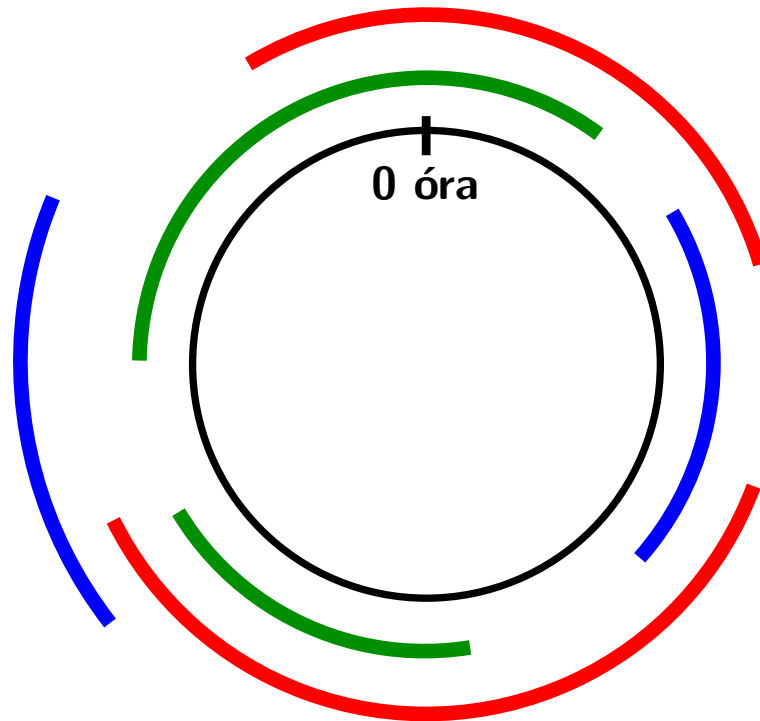
További kiterjesztés: ha minden szín **csak egyszer** szerepel a kezdeti színezésben, akkor a probléma polinom időben megoldható **merevkörű gráfokon**. [M. 2003]

Periodikus ütemezés

Mindennap ugyanazt a repülőgép kiosztást szeretnénk használni. Ha lehetnek éjszelen átnyúló járatok akkor egy **ívgráfot** kell színeznünk.

A minimális színszám meghatározása ívgráfokon **NP**-teljes. [Garey, Johnson, Miller, Papadimitriou 1980]

Ismert determinisztikus $\frac{3}{2}$ -közelítő [Karapetian 1980] és randomizált 1,37-közelítő [Kumar 2001] algoritmus.

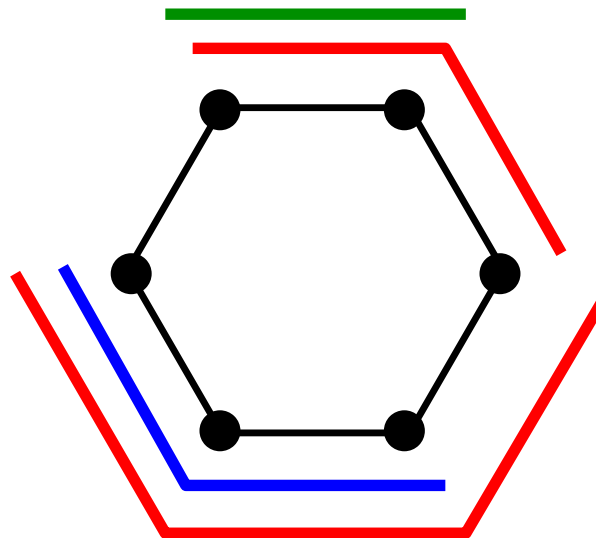


WDM gyűrűk

Újabb példa az ívszínezés alkalmazása:

WDM gyűrűben a kijelölt utakhoz kell hullámhosszt rendelni. Egy optikai szálon egy hullámhosszt csak egy összeköttetés használhat.

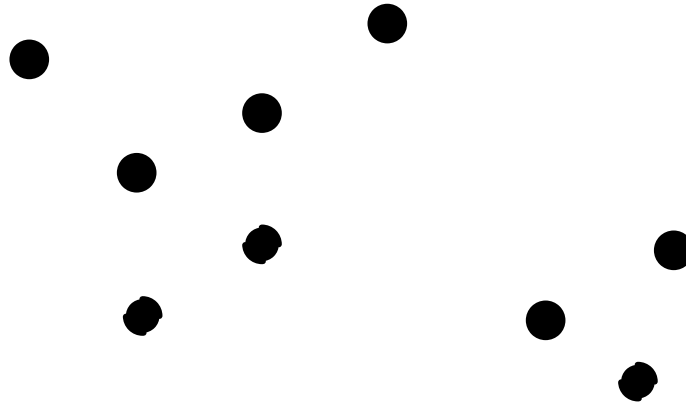
WDM technológia: egy optikai szálon több párhuzamos csatorna a különböző hullámhosszokon. Egy adatfolyamnak végig azonos hullámhosszon kell haladnia, mert a teljesen optikai kapcsolók nem képesek hullámhosszkonverzióra.



Bázisállomások frekvenciakiosztása

Mindegyik bázisállomáshoz egy frekvenciát kell rendelnünk, közeli bázisállomások interferencia miatt nem használhatják ugyanazt a frekvenciát.

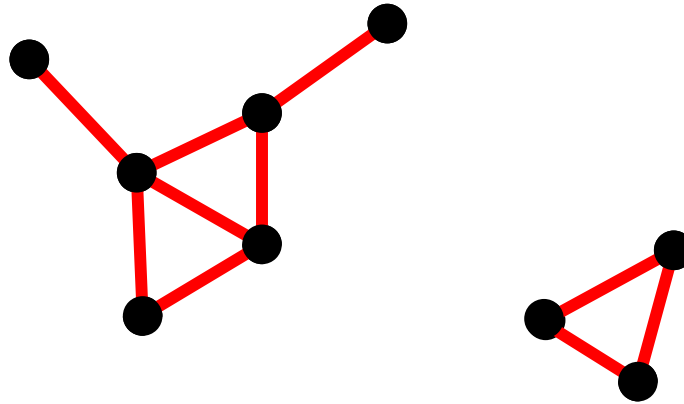
A probléma **interferencia gráfjában** a közeli állomásokat kötjük össze.



Bázisállomások frekvenciakiosztása

Mindegyik bázisállomáshoz egy frekvenciát kell rendelnünk, közeli bázisállomások interferencia miatt nem használhatják ugyanazt a frekvenciát.

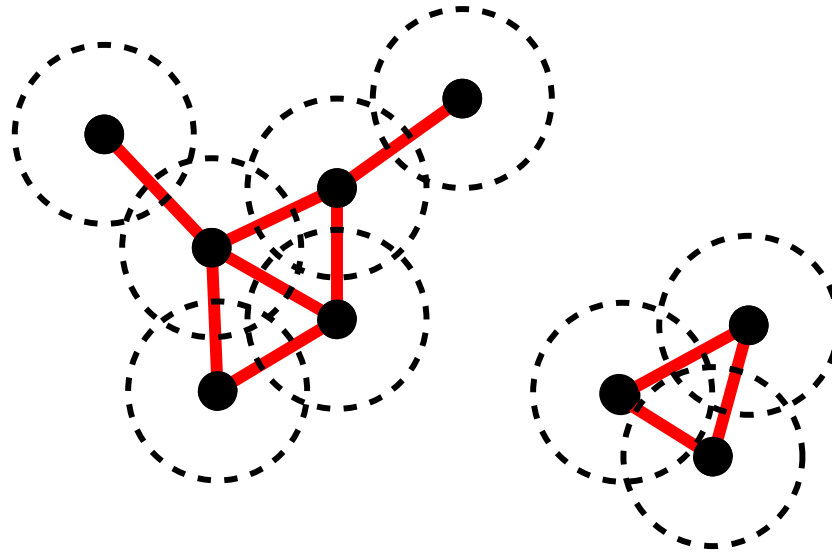
A probléma **interferencia gráfjában** a közeli állomásokat kötjük össze.



Bázisállomások frekvenciakiosztása

Mindegyik bázisállomáshoz egy frekvenciát kell rendelnünk, közeli bázisállomások interferencia miatt nem használhatják ugyanazt a frekvenciát.

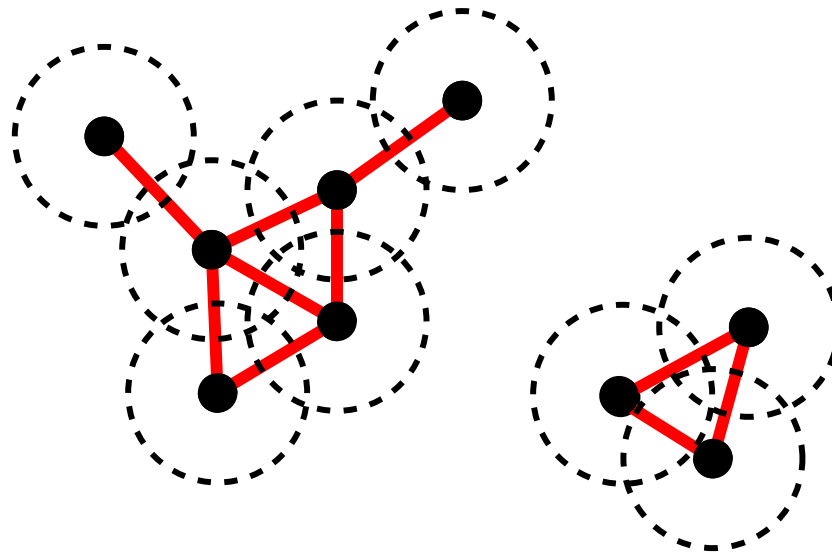
A probléma **interferencia gráfjában** a közeli állomásokat kötjük össze.



Bázisállomások frekvenciakiosztása

Mindegyik bázisállomáshoz egy frekvenciát kell rendelnünk, közeli bázisállomások interferencia miatt nem használhatják ugyanazt a frekvenciát.

A probléma **interferencia gráfjában** a közeli állomásokat kötjük össze.



Speciális eset:

Egységkorong gráf: a csúcsok egységnyi sugarú korongok, az egymást metszők össze vannak kötve.

3-közelítő algoritmus egységkorong gráfok színezésére (pl. [Gräf et al. 1998])

Multiszínezés

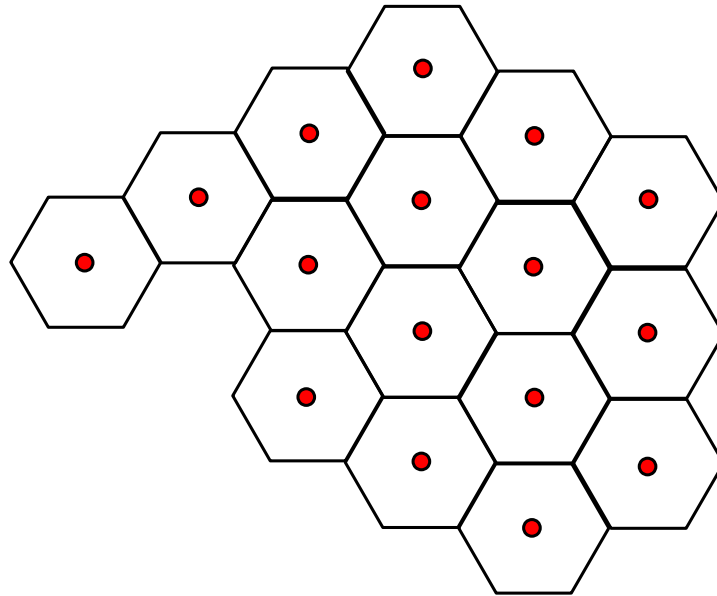
Multiszínezés: minden csúcsra adott egy szám, ennyi szint kell neki adni úgy, hogy szomszédos színhalmazok diszjunktak legyenek.

Alkalmazás: egy bázisállomáshoz nem egyetlen frekvenciát kell rendelni, hanem megadott számút.

Multiszínezés

Multiszínezés: minden csúcsra adott egy szám, ennyi szint kell neki adni úgy, hogy szomszédos színhalmazok diszjunktak legyenek.

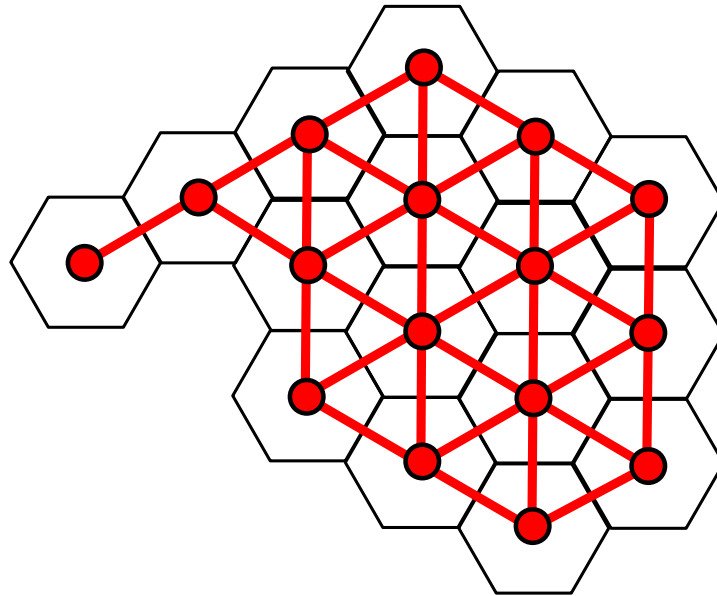
Alkalmazás: egy bázisállomáshoz nem egyetlen frekvenciát kell rendelni, hanem megadott számút.



Multiszínezés

Multiszínezés: minden csúcsra adott egy szám, ennyi színt kell neki adni úgy, hogy szomszédos színhalmazok diszjunktak legyenek.

Alkalmazás: egy bázisállomáshoz nem egyetlen frekvenciát kell rendelni, hanem megadott számút.



Hatszögmodell: minden cella egy hatszög, a gráf a háromszögrács részgráfja.

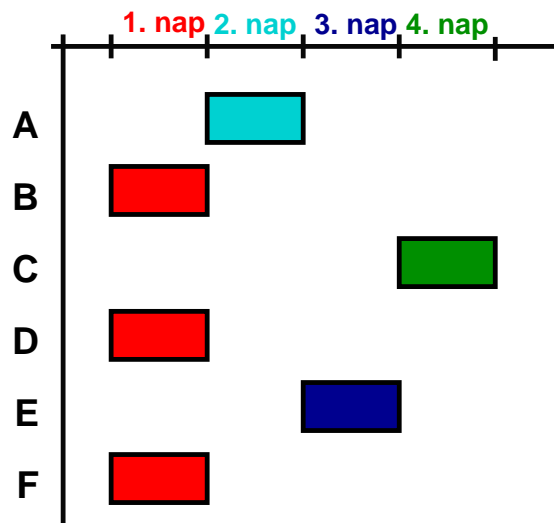
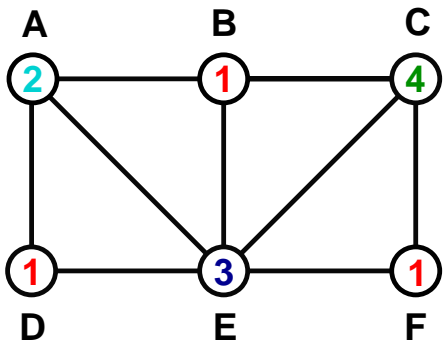
A síkbeli háromszögrácsban a multiszínezés problémára ismert polinom idejű $\frac{4}{3}$ -közelítő algoritmus [Narayanan, Shende 2001]

Ütemezési problémák

Gráf csúcsai: elvégzendő feladatok (egységnyi hosszúak)

Gráf élei: egyszerre nem végezhető feladatok

Színek: lehetséges időpontok

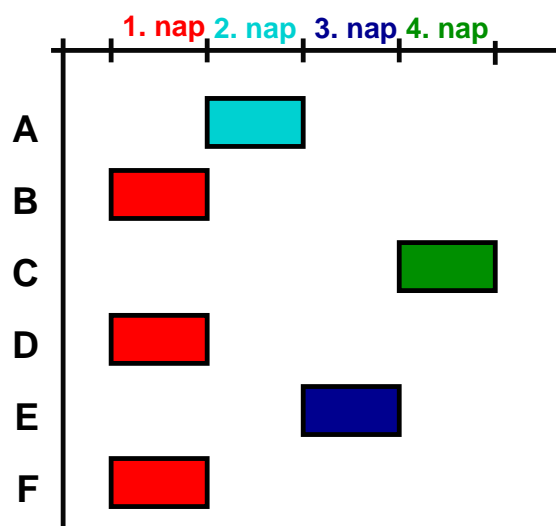
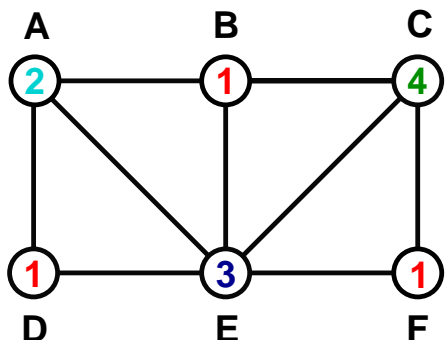


Ütemezési problémák

Gráf csúcsai: elvégzendő feladatok (egységnyi hosszúak)

Gráf élei: egyszerre nem végezhető feladatok

Színek: lehetséges időpontok



Színek összege: 12

Átlagos befejezési idő: 2

Színek számának minimalizálása: összes feladat befejezése minél korábban.

Minimum összegű színezés: a feladatok átlagos befejezési idejének a minimalizálása.

Élszínezés

A gráf éleihez kell színeket rendelni, azonos csúcsra illeszkedő éleknek különböző színűeknek kell lenniük.

Alkalmazás: Kétprocesszoros feladatok ütemezése.

Gráf csúcsai: processzorok

Gráf élei: két processzor együttes munkáját igénylő feladat

Színek: lehetséges időpontok

Élszínezés **NP**-nehéz. Ha nincsenek párhuzamos élek: $OPT+1$ színnel lehet színezni (Vizing-tétel).

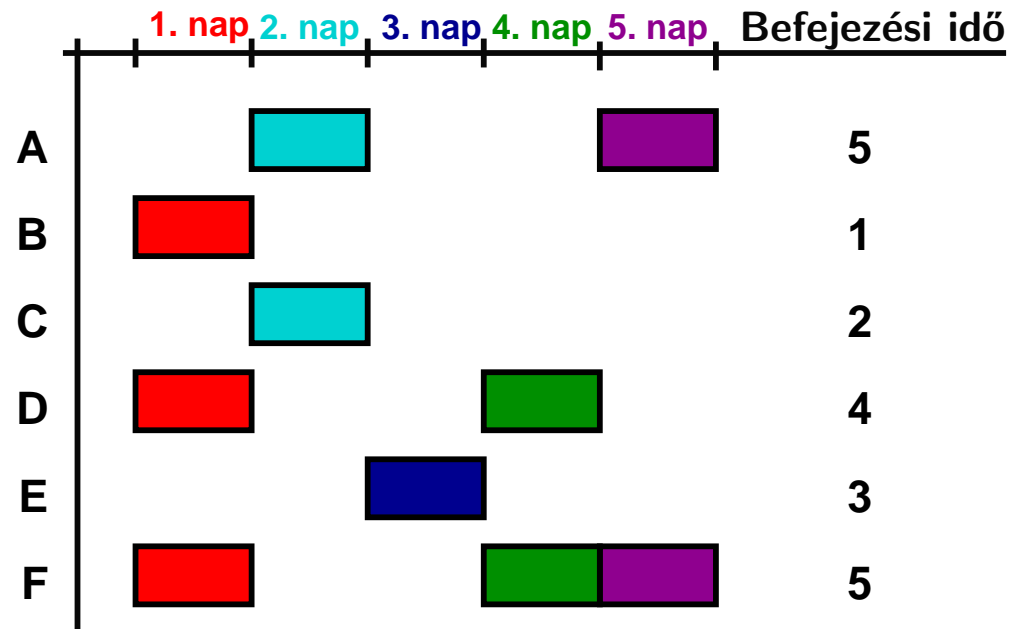
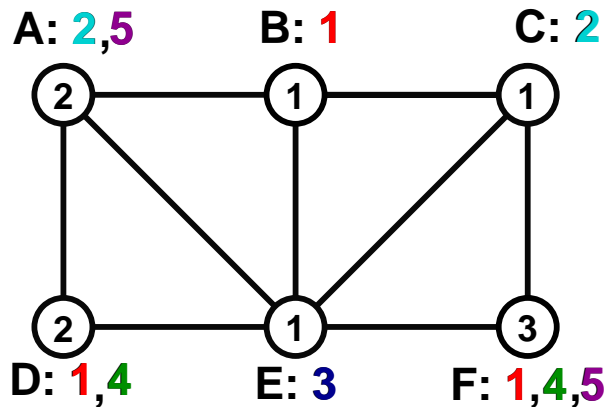
Általános eset: polinom idejű algoritmus $1,1 \cdot OPT + 0,8$ színnel [Nishizeki, Kashiwagi 1990]

Minimum összegű multiszínezés

Minden feladat adott számú időegységet igényel \Rightarrow minden csúcshoz adott számú színt kell rendelni.

Egy csúcs **befejezési ideje** a hozzárendelt legnagyobb szín.

Cél: minimalizáljuk a befejezési idők összegét, ezzel minimalizáljuk a feladatok átlagos befejezési idejét.



Összeg: 20

Minimum összegű multiszínezés (folyt.)

- **NP**-nehéz bináris fákon [M. 2002]
- $(1 + \epsilon)$ -közelítés (polinom idejű közelítő séma) fákra és síkgráfokra [Halldórsson et al. 2003]
- $\frac{3}{2}$ -közelítő algoritmus páros gráfokra [Bar-Noy and Kortsarz 1998]

Élszínezési változat:

- 2-közelítő algoritmus [Bar-Noy et al. 2000]
- **NP**-nehéz fákon [M. 2003]
- Polinom idejű közelítő séma fákra [M. 2003]

Összefoglalás

- Színezés: konfliktusmentes hozzárendelés.
- A színek lehetnek
 - ★ kiszolgálók (repülőgép),
 - ★ erőforrások (frekvencia, hullámhossz)
 - ★ végrehajtási időpontok.
- Célfüggvények: színek számának, színek összegének a minimalizálása.
- Természetes kiterjesztés: multiszínezés.
- Saját eredmények: polinom idejű algoritmusok, **NP**-teljességi eredmények, közelítő algoritmusok.