

9. gyakorlat

Magtér, képtér, sajátérték, sajátvektor, komplex számok

- Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere és legyen $\mathcal{A} : V \rightarrow V$ egy lineáris transzformáció. Az \mathcal{A} mátrixa a $\underline{b}_1 = (1, 1)$ és $\underline{b}_2 = (1, -1)$ vektorokból álló bázisban felírva a következő: $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg x és y értékét, ha tudjuk, hogy $(3, 1) \in \text{Ker } \mathcal{A}$.
- Legyen $\mathcal{A} : V \mapsto V$ olyan lineáris transzformáció, amire $\text{Im } \mathcal{A} \subseteq \text{Ker } \mathcal{A}$. Bizonyítsuk be, hogy az \mathcal{A} transzformáció (tetszőleges bázisban felírt) A mátrixára $A^2 = 0$.
- A legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok vektorteret alkotnak \mathbb{R} felett. Mutassuk meg, hogy a deriválás ennek a térnek egy Φ lineáris transzformációja. Írjuk fel Φ mátrixát egy tetszőlegesen megválasztott bázisban. Mi Φ magtere és képtere?
- Az $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel:
 - Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő.
 - Tetszőleges 8 lineárisan független V_1 -beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem 0.Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\dim V_1 \leq 13$.
- Keressd meg a az alábbi mátrix minden sajátértékét és sajátvektorát!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

- Keressd meg az alábbi mátrix összes sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez tartozó összes sajátvektort is!

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

- Végezd el az alábbi műveleteket!

$$(a) (4 + i)(5 - 2i) + (4i - 1)^2 \quad (b) \frac{9 + 7i}{3 - 2i} \quad (c) \left| \frac{6 + 3i}{6 - 3i} \right| \quad (d) (i - 1)^{50}$$

- Oldd meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán!

$$(a) z^2 - iz + 2 = 0 \quad (b) |z| = 2z + i \quad (c) z^2 = \bar{z} \quad (d) z^5 = 2i - \sqrt{12}$$

- Mennyi az n . egységgyökök összege?
 - Mennyi az n . egységgyökök szorzata?

- Bizonyítsuk be, hogy a 2010. egységgyökök közül kiválasztható 876, melyek összege 0.

- Van-e a kilencedik egységgyökök között pontosan hat, melyek összege zérus? És pontosan hét?