Bevezetés a számításelméletbe I.
2010. október 18.

7. gyakorlat
Lineáris leképezések

1. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere. Döntsd el, hogy az alábbi V-ről V-be menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Minden $\underline{v}$ vektornak feleltessük meg
(a) az x tengelyre vett tükörképét;
(b) azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátái közül a nagyobb;
(c) azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a $\underline{v}$ koordinátáinak összege;
(d) a $+90°$-kal való elforgatottját.

2. Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ az a függvény, amely a tér (x, y, z) vektorához a sík $(x - y + z, x - y + z)$ vektorát rendeli.
(a) Mutasd meg, hogy $\mathcal{A}$ lineáris leképezés!
(b) Legyen $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a tér, $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ pedig a sík „szokásos" bázisa. Írd fel $\mathcal{A}$ mátrixát a B és C bázisok szerint!

3. Írd fel az alábbi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris leképezések mátrixát a „szokásos" $\{(1, 0), (0, 1)\}$ bázisban!
(a) az y tengelyre való tükrözés;
(b) az origó körüli $+60°$-os forgatás;
(c) előbb egy y tengelyre való tükrözés, majd egy origó körüli $+60°$-os forgatás.

4. Milyen leképezésekhez tartoznak az alábbi mátrixok a sík vektorterén?
$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix}cos\phi & -sin\phi\\ sin\phi & cos\phi\end{pmatrix}$$

5. Döntsd el, hogy az alábbi $\mathbb{R}^3$-ről $\mathbb{R}^2$-be (vagyis a szokásos térről a szokásos síkba) menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, akkor írd fel a mátrixukat, a következő bázisok szerint:
$\mathbb{R}^3$ bázisa: $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$,
$\mathbb{R}^2$ bázisa: $\{(1, 1), (1, -1)\}$).

$$\mathcal{A} \;:\; (x, y, z) \;\rightarrow\; (x, z) \qquad \mathcal{B} \;:\; (x, y, z) \;\rightarrow\; (x \cdot y, x \cdot z) \qquad \mathcal{C} \;:\; (x, y, z) \rightarrow (x + y, x + z)$$

6. Jelölje V a valós számpárok (azaz a síkvektorok) szokásos vektorterét. Egy $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformációról tudjuk, hogy az $(1, 2)$ vektorhoz a $(6, 7)$ vektort, a $(-1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 9)$ vektort rendeli. Írjuk fel $\mathcal{A}$ mátrixát a „szokásos", vagyis az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ vektorokból álló bázisban!

7. Lássuk be a következőket:
(a) $\begin{pmatrix}cos\phi & -sin\phi\\ sin\phi & cos\phi\end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix}cosk\phi & -sink\phi\\ sink\phi & cosk\phi\end{pmatrix}$
(b) $\{x$-tengelyre tükrüzés$\} \times \{y$-tengelyre tükrözés$\} = \{$középpontos tükrözés$\}$