6. gyakorlat
Mátrix inverze, rangja

1. Döntsük el, hogy létezik-e inverze az alábbi A mátrixnak, ha igen, akkor számítsuk ki A inverzét!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Igaz-e, hogy ha az $n \times n$-es méretű A és B mátrixoknak létezik inverze, akkor AB-nek is létezik? Hogyan számítható ki a szóban forgó $(AB)^{-1}$ mátrix A^{-1} és B^{-1} segítségével?

3. Igaz-e, hogy ha A, B és C $n \times n$-es mátrixok, $A \neq 0$, valamint $AB = AC$, akkor $B = C$?

4. Számítsd ki az alábbi mátrixok rangját! (A (c) és (d) részben a c valós paraméter függvényében.)

(a) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 1 & 4 & 7 & 10 & 13 \\ 1 & 5 & 9 & 13 & 17 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} c & 2 & 3 \\ 21 & 12 & 18 \\ -14 & -8 & -12 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2c+7 & 3c-2 & -5 \end{pmatrix}$

5. A c valós paraméter milyen esetén lesz az alábbi mátrix rangja minimális?
$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -3 & 1 \\ 6 & 18 & -3 & -4 \\ 3 & 6 & 3c & c^2 \\ 0 & 2 & c^2 & 2c \end{pmatrix}$

6. Az $n \times n$-es A mátrixra $A^2 = 0$. Lehet-e A rangja n?

7. Tegyük fel, hogy az A mátrix minden sora számtani sorozat. (Vagyis bármelyik sor elemein balról jobbra végighaladva egy-egy számtani sorozat tagjait kapjuk.) Bizonyítsuk be, hogy $\mathrm{r}(A) \leq 2$ (ahol r a mátrix rangját jelöli).

8. Legyen A egy 6×5-ös valós mátrix. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
   a) Ha az első három sor lineárisan összefüggő, akkor a bal felső 3×3-as aldetermináns 0.
   b) Ha a bal felső 3×3-as aldetermináns 0, akkor az első három sor lineárisan összefüggő.
   c) Ha az első három és az utolsó három oszlop is lineárisan összefüggő, akkor a $r(A) \leq 3$.
   d) Ha az első két és az utolsó két oszlop is lineárisan összefüggő, akkor a $r(A) \leq 3$.

Gondolkodtató feladatok:

9. Legyen A és B $n \times m$-es mátrix. Bizonyítsuk be, hogy $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$ (ahol r-rel a mátrixok rangját jelöltük).

10. Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges (de egymással összeszorozható) A és B mátrixra $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.

11. Legyen A tetszőleges $m \times n$-es mátrix, B pedig olyan $n \times n$-es mátrix, melyre $\det(B) = 0$. Bizonyítsuk be, hogy $r(AB) < n$.