Bevezetés a számításelméletbe I.
2010. október 4.

5. gyakorlat
Kifejtési tétel, Mátrixok szorzása

1. Számold ki a *kifejtési tétel felhasználásával* az alábbi determinánsok értékét!

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 8 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$

2. Egy $n \times n$-es A mátrix minden elemét megszorozzuk a hozzá tartozó előjeles aldetermináns értékével. Mi lesz az így kapott n^2 darab szorzat összege?

3. Írd fel az $A(1,1,7)$, $B(3,2,8)$, $C(8,4,8)$ pontokon átmenő sík egyenletét!

4. Számold ki az alábbi mátrixokat!

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2010}$ (b) $\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}^{2011}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{n}$

5. A (10×20)-as A mátrixra teljesül, hogy minden sorában az elemek összege 1. A (20×30)-as B mátrix minden eleme 2. Határozzuk meg az $A \cdot B$ szorzatot!

6. Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyik/melyek igaz(ak) tetszőleges A négyzetes mátrixra! (0-val jelöltük a csupa nulla mátrixot.)
(a) Ha van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$, akkor $\det A = 0$.
(b) Ha $\det A = 0$, akkor van olyan $k \geq 1$ egész szám, amelyre $A^k = 0$.

7. Legyen A $n \times n$-es mátrix, $x, y \in \mathbb{R}^n$ pedig n magas oszlopvektorok. Bizonyítsd be, hogy ha $x \neq y$, de $Ax = Ay$ akkor $\det A = 0$.

8. Legyenek $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $(n \times n)$-es mátrixok. Bizonyítsd be, hogy ha A oszlopai lineárisan függetlenek és B oszlopai is lineárisan függetlenek, akkor az $A \cdot B$ mátrix oszlopai is lineárisan függetlenek!

9. Határozd meg az összes olyan 2×2-es X mátrixot, amelynek minden eleme racionális szám és amelyre $X^{2010} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ teljesül.