10. gyakorlat
Magtér, képtér. sajátérték, sajátvektor

1. Határozzuk meg az alábbi $\mathbb{R}^3$-ről $\mathbb{R}^2$-be menő lineáris leképezések magterét és képterét, valamint azok dimenzióit!

   (a) $\mathcal{A} : (x, y, z) \to (x, z)$

   (b) $\mathcal{B} : \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere és legyen $\mathcal{A} : V \to V$ egy lineáris transzformáció. Tudjuk, hogy $(3, 1) \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Az $\mathcal{A}$ mátrixa a $\underline{b}_1 = (1, 1)$ és $\underline{b}_2 = (1, -1)$ vektorokból álló bázisban felírva a következő: $\begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$. Határozzuk meg x és y értékét!

3. Legyen $\mathcal{A} : V \mapsto V$ olyan lineáris transzformáció, amire $\operatorname{Im} \mathcal{A} \subseteq \operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Bizonyítsuk be, hogy az $\mathcal{A}$ transzformáció (tetszőleges bázisban felírt) A mátrixára $A^2 = 0$.

4. A legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok vektorteret alkotnak $\mathbb{R}$ felett. Mutassuk meg, hogy a deriválás ennek a térnek egy Φ lineáris transzformációja. Írjuk fel Φ mátrixát egy tetszőlegesen megválasztott bázisban. Mi Φ magtere és képtere?

5. Az $\mathcal{A} : V_1 \mapsto V_2$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy teljesül rá az alábbi két feltétel:
   (a) Tetszőleges 7 elem képe lineárisan összefüggő.
   (b) Tetszőleges 8 lineárisan független V_1-beli elem között van olyan, amelyiknek a képe nem $\underline{0}$.
   Bizonyítsuk be, hogy ekkor $\dim V_1 \leq 13$.

6. Keresd meg a az alábbi mátrix minden sajátértékét
   és sajátvektorát!
   $$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$$

7. Keresd meg az alábbi mátrix összes sajátértékét és a legnagyobb sajátértékhez tartozó összes sajátvektort is!
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ 6 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

---

8. Legyen $\mathcal{A}$ lineáris leképezés V_1-ről V_2-be, $\underline{v}_i \in V_1$. Melyek igazak az alábbi állítások közül?
   (a) Ha $\mathcal{A}(\underline{v}_1) = \mathcal{A}(\underline{v}_2)$, akkor $\underline{v}_1 - \underline{v}_2 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.
   (b) Ha $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer V_2-ben.
   (c) Ha $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben, akkor $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\operatorname{Im} \mathcal{A}$-ban.
   (d)Ha $\mathcal{A}(\underline{v}_1), \ldots, \mathcal{A}(\underline{v}_k)$ generátorrendszer $\operatorname{Im} \mathcal{A}$-ban, akkor $\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_k$ generátorrendszer V_1-ben.