

9. gyakorlat Lineáris leképezések

- Legyen $V = \mathbb{R}^2$ a síkvektorok szokásos vektortere. Döntsd el, hogy az alábbi V -ről V -be menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Minden \underline{v} vektornak feleltessük meg
 - az x tengelyre vett tükörképét;
 - azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a \underline{v} koordinátái közül a nagyobb;
 - azt az x tengelyre eső vektort, amelynek első koordinátája a \underline{v} koordinátáinak összege;
 - a $+90^\circ$ -kal való elforgatottját.
- Legyen $\mathcal{A} : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ az a függvény, amely a tér (x, y, z) vektorához a sík $(x - y + z, x - y + z)$ vektorát rendeli.
 - Mutasd meg, hogy \mathcal{A} lineáris leképezés!
 - Legyen $B = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ a tér, $C = \{(1, 0), (0, 1)\}$ pedig a sík „szokásos” bázisa. Írd fel \mathcal{A} mátrixát a B és C bázisok szerint!
- Írd fel az alábbi $\mathcal{A} : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}^2$ lineáris leképezések mátrixát a „szokásos” $\{(1, 0), (0, 1)\}$ bázisban!
 - az y tengelyre való tükrözés;
 - az origó körüli $+60^\circ$ -os forgatás;
 - előbb egy y tengelyre való tükrözés, majd egy origó körüli $+60^\circ$ -os forgatás.

4. Milyen leképezésekhez tartoznak az alábbi mátrixok a sík vektorterén?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

5. Döntsd el, hogy az alábbi \mathbb{R}^3 -ről \mathbb{R}^2 -be (vagyis a szokásos térről a szokásos síkba) menő hozzárendelések lineáris leképezések-e? Ha igen, akkor írd fel a mátrixukat, a következő bázisok szerint:
 \mathbb{R}^3 bázisa: $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$,
 \mathbb{R}^2 bázisa: $\{(1, 1), (1, -1)\}$.

$$\mathcal{A} : (x, y, z) \rightarrow (x, z) \quad \mathcal{B} : (x, y, z) \rightarrow (x \cdot y, x \cdot z) \quad \mathcal{C} : (x, y, z) \rightarrow (x + y, x + z)$$

6. Jelölje V a valós számpárok (azaz a síkvektorok) szokásos vektorterét. Egy $\mathcal{A} : V \mapsto V$ lineáris transzformációról tudjuk, hogy az $(1, 2)$ vektorhoz a $(6, 7)$ vektort, a $(-1, 2)$ vektorhoz pedig a $(8, 9)$ vektort rendeli. Írjuk fel \mathcal{A} mátrixát a „szokásos”, vagyis az $(1, 0)$ és $(0, 1)$ vektorokból álló bázisban!
7. Lássuk be a következőket:
 - $\begin{pmatrix} \cos\phi & -\sin\phi \\ \sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}^k = \begin{pmatrix} \cos k\phi & -\sin k\phi \\ \sin k\phi & \cos k\phi \end{pmatrix}$
 - $\{x\text{-tengelyre tükrözés}\} \times \{y\text{-tengelyre tükrözés}\} = \{\text{középpontos tükrözés}\}$