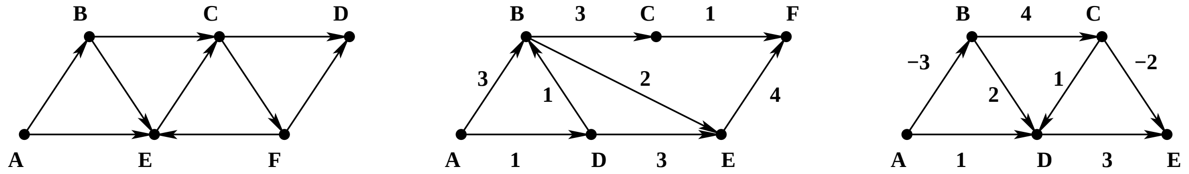
Számítástudomány alapjai
4. gyakorlat

2007. október 4.

1. Járjuk be szélességi bejárással az A csúcsból kiindulva az alábbi gráfok közül az elsőt:



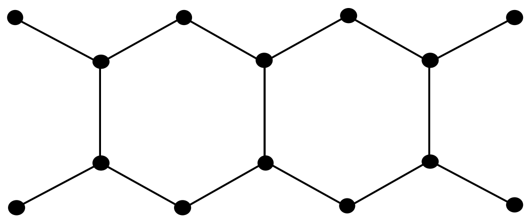
2. Határozzuk meg a Dijkstra algoritmussal a legrövidebb utakat az A pontból kiindulva a fenti három gráf közül a másodikban.

3. Futtassuk le a Ford algoritmust a fenti gráfok közül a harmadikon az A pontból az alábbi élsorrenddel: AD, AB, BD, BC, CD, CE, DE

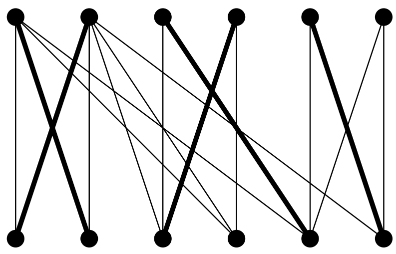
4. Futtassuk le a Floyd algoritmust a fenti gráfok közül a harmadikon az alábbi pontsorrenddel: A, B, C, D, E

5. Hogyan néznek ki a K_n teljes gráf, illetve a $K_{n,n}$ teljes páros gráf szélességi feszítőfái?

6. Páros gráf-e a 6, illetve 5 hosszúságú kör? És egy tetszőleges fa? És az alábbi gráf? (Ha igen a válasz, akkor ossza is szét a csúcsokat „fiúkra és lányokra”, ha nem, bizonyítsa ezt be.)



7. Maximális párosítást alkotnak-e az alábbi páros gráfban a vastag élek? Ha igen, bizonyítsa be, hogy maximális a párosítás! Ha nem, akkor adjon meg egy javítóutat! (ZH, 2004. március 19.)



8. Egy $2n$ pontú egyszerű gráfban a minimális fokszám legalább n. Bizonyítsuk be, hogy ekkor van benne teljes párosítás! (ZH, 2001. március 20.) (Vigyázat: a gráf nem feltétlenül páros!)

---

9. Egy vállalatnál hét pályázó jelentkezett hat üres munkahelyre (számozzuk ezeket 1-től 6-ig), egy ember több helyre is: Aladár az 1-es; Béla az 1, 3-as; Csaba a 2, 4, 6-os; Dani a 2, 5-ös; Erzsi a 3, 4, 5, 6-os; Feri az 1, 3-as; Géza a 3-as munkahelyre. Döntsd el, hogy betölthető-e mind a hat munkahely (egy ember csak egy helyre kerülhet)! Ha nem, akkor hány tölthető be? Változtat-e valamin, ha Feri meggondolja magát és a 2-es munkahelyet is hajlandó elfogadni?

10. Egy kiránduláson n házaspár vesz részt. El kellene osztani közöttük $2n$ különböző fajta csokit úgy, hogy mindenki egyet-egyet kapjon. Tudjuk, hogy mindenki legalább n fajtát szeret a csokik közül. Továbbá minden emberre teljesül, hogy ha ő valamelyik fajta csokit nem szereti, akkor a házastársa ezt a fajtát biztosan szeretni fogja. Bizonyítsd be, hogy a csokik szétoszthatók úgy, hogy mindenki olyat kapjon, amit szeret!

11. Adja meg az összes minimális élszámú irányított gráfot (élsúlyukkal együtt), melyek esetén a Dijkstra algoritmus futása során a d tömb a következőképpen változik. (Az algoritmust a v_1 pontból futtatjuk.)

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	2	6	∞	∞	7
0	2	5	9	∞	6
0	2	5	6	9	6
0	2	5	6	8	6
0	2	5	6	7	6

12. A lap elején levő első gráfban határozza meg a C csúcsból a többi csúcsba vezető legrövidebb utak hosszát.

13. A lap elején levő második gráfban határozza meg a D csúcsból a többi csúcsba vezető legrövidebb utak hosszát.

14. Futtassuk le a Ford algoritmust a lap elején levő harmadik gráfon az A pontból az alábbi élsorrenddel: DE, CE, CD, BC, BD, AB, AD

15. Futtassuk le a Floyd algoritmust a lap elején levő utolsó gráfon az alábbi pontsorrenddel: E, D, C, B, A

16. A G gráf csúcsai legyenek a (8×8-as) sakktábla mezői; két csúcs akkor legyen összekötve, ha a megfelelő mezők egy lóugrásra vannak egymástól. Döntsd el, hogy G páros gráf-e!

17. (a) Bizonyítsd be, hogy reguláris páros gráfban van teljes párosítás! (Egy gráf *reguláris*, ha minden pont foka ugyanannyi.)
(b) Egy páros gráf minden csúcsába pontosan r él fut. Véletlenül éppen r darab különböző színű ceruzánk van (a feketén kívül, amivel az eredeti ábra készült). Bizonyítsuk be, hogy az élek kihúzhatók színessel úgy, hogy minden csúcsba csupa különböző színű menjen!
(c) Valaki szétosztott egy pakli francia kártyát 13 darab 4 lapból álló csomagba. Bizonyítsd be, hogy ekkor mindegyik csomagból kiválasztható egy lap úgy, hogy a kiválasztott lapok között mindegyik fajta figurából éppen egy legyen (vagyis egy 2-es, egy 3-as, stb., egy ász).
(d) A sakktáblán véletlenszerűen elhelyezzük a 32 sakkfigurát. Végül azt vesszük észre, hogy minden sorba és minden oszlopba éppen 4 figura került. Bizonyítsd be, hogy a figurák közül kiválasztható 8 úgy, hogy minden sorban és oszlopban éppen 1 van a kiválasztottak közül!