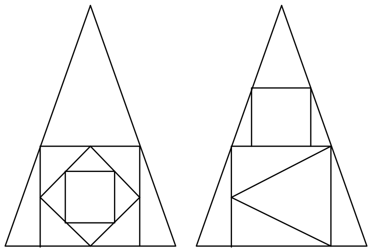
Számítástudomány alapjai
3. gyakorlat

2007. szeptember 27.

1. Az n^2 számú egységnégyzetből álló négyzet alakú rácsban annyi vonalat kell behúzni, hogy azok mentén bármely pontból bármely pontba el lehessen jutni. Mennyi a berajzolt szakaszok összhosszának minimuma?

2. Egy teljes gráf ponthalmaza $\{x_1, x_2, \dots, x_t, y_1, y_2, \dots, y_s\}$. Az (x_i, x_j) élek költsége 1, az (y_i, y_j) éleké 2, az (x_i, y_j) éleké pedig 3. Mennyi a minimális feszítőfa költsége?

3. Ha lehet, rajzold le az alábbi ábrákat egy vonallal, a ceruza felemelése nélkül!



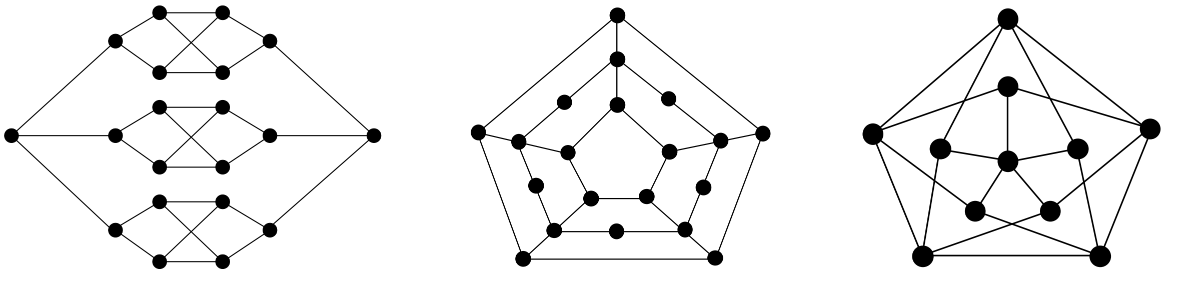
4. Milyen n esetén tartalmaz az n pontú teljes gráf Euler kört, Euler utat, Hamilton kört és Hamilton utat?

5. 10 házaspár minden tagjára igaz, hogy a maradék 9 házaspár mindegyikének legalább az egyik tagját ismeri. (Az ismeretség kölcsönös.) Bizonyítsuk be, hogy az említett 20 személy leültethető egy 20-személyes, kör alakú asztalhoz úgy, hogy mindenki ismerje a két mellette ülő személy mindegyikét! (ZH, 2005. április 1.)

---

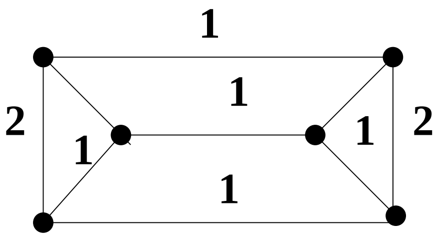
6. Bejárható-e egy 4×4-es sakktábla lóval úgy, hogy minden mezőre éppen egyszer lépünk rá?

7. Van-e Hamilton-kör az alábbi gráfokban? És Hamilton-út?

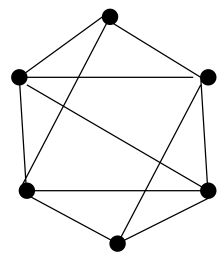


8. Egy $2n - 1$ pontú gráf minden pontjának a foka legalább $n - 1$. Bizonyítsuk be, hogy ekkor létezik a gráfban Hamilton-út!

9. Hány különböző minimális súlyú feszítőfája van az alábbi élsúlyokkal ellátott gráfnak?



10. (a) Legalább hány élet kell hozzávenni az alábbi gráfhoz, hogy legyen benne Euler-kör?
(b) Legalább hány élet kell kitörölni az alábbi gráfból, hogy legyen benne Euler-kör?



11. Egy 2000 csúcsú G gráfban a minimális fokszám 1500. Biz.be, hogy G tartalmaz legalább 251 páronként éldiszjunkt Hamilton-kört!

12. A G gráf pontjai egy 8-elemű halmaz 2-elemű részhalmazainak felelnek meg. Két pont akkor van összekötve egy éllel, ha a pontoknak megfelelő két részhalmaz diszjunkt. Van-e G-ben Hamilton-kör? És Hamilton út?

13. Hány Hamilton-utat, illetve hány Hamilton-kört tartalmaz az n csúcsú teljes gráf?

14. Igazold, hogy ha egy egyszerű gráf minden pontjának foka 4, akkor az élei kiszínezhetők piros és kék színekkel úgy, hogy (minden él teljes hosszában egy színű legyen és) minden ponthoz két piros és két kék él illeszkedjék.

15. * Egy n tagú társaságban bármely három ember között van kettő, aki nem ismeri egymást. Tudjuk azt is, hogy a társaságban mindenki legalább $\frac{n+2}{4}$ embert ismer (az ismeretségek kölcsönösek). Bizonyítsuk be, hogy a társaság tagjai leültethetők egy kerek asztal mellé úgy, hogy a szomszédos emberek vagy ismerik egymást vagy van közös ismerősük.

16. Hogyan változhat egy gráfban a Hamilton-kör megléte, ha behúzunk illetve törlünk egy élt? Az Euler-körről tudunk valami ilyet állítani?