Számítástudomány alapjai
2. gyakorlat

2007. szeptember 20.

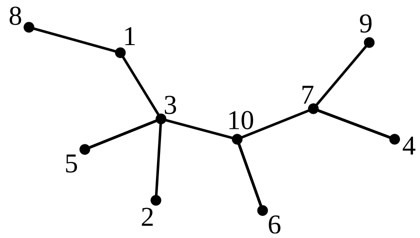
1. Hat pár piros és nyolc pár zöld zokni van a fiókunkban, de sajnos nincsenek összepárosítva. Hány darabot kell kivenni a sötétben ahhoz, hogy biztosan legyen közte egy azonos színű pár? És akkor hányat kell kivenni, ha egy piros pár zoknira van szükségünk?

2. Hány éle van az n pontú teljes gráfnak, a K_n-nek? Hány éle van egy olyan n csúcsú gráfnak, ahol minden csúcs fokszáma 3? És ha minden fokszám 4?

3. Határozd meg az összes olyan, páronként nem izomorf, egyszerű gráfot, melyre (a) $v = 4$, $e = 5$ (b) $v = 5$, $e = 3$ (c) $v = 5$, $e = 7$ (d) $v = 5$, $e = 8$. (v jelöli a pontok számát, e az élek számát.)

4. Rajzold fel az összes 3, 4, illetve 5 pontú fát! (Az izomorfakat csak egyszer.)

5. (a) Határozzuk meg a rajzon látható fa Prüfer-kódját!
   (b) Mely fa Prüfer-kódja a 82844358 sorozat?



---

6. Rajzolj olyan egyszerű gráfot, aminek (a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 csúcsa van és minden csúcs foka 3.

7. Hány 60 csúcsú, 1768 élű, páronként nem izomorf egyszerű gráf létezik?

8. Egy n pontú egyszerű gráfban minden pont foka legalább $\frac{n}{2}$. Bizonyítsd be, hogy a gráf összefüggő!

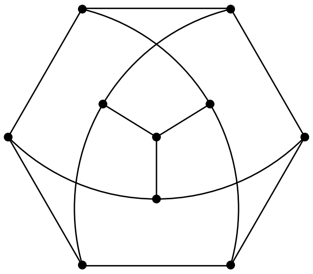
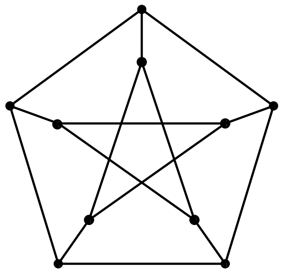
9. Egy fában minden pont foka 1, 2 vagy 3. Hány 1 fokú pont van, ha a 3 fokú pontok száma 100?

10. Egy fa Prüfer-kódja 100 tagú és csupa ugyanolyan számból áll. Rajzold fel a fát!

11. Egy társaság 40 tagját az angol fociról faggattuk. 18-an állították, hogy kedvelik az Arsenalt, 16-an a MU-t és 12-en a Chelsea-t. 7 ember az Arsenalt és a MU-t, 5-en az Arsenalt és a Chelsea-t, 3-an pedig a MU-t és a Chelsea-t is szeretik. 2 ember mindhárom csapatot kedveli. Hányan vannak, akik mindhárom csapatot utálják?

12. Bizonyítsuk be, hogy ha az $1, 2, 3, \ldots 2004$ számok közül kiválasztunk 1003 db különbözőt, akkor lesz a kiválasztott számok között kettő, melyeknek összege éppen 2005. (ZH, 2004. március 19.)

13. Egy G gráf pontjai legyenek egy 5-elemű halmaz elemeiből képezhető párok és két pont akkor és csak akkor legyen szomszédos a gráfban, ha a megfelelő párok diszjunktak. A következő két gráf közül melyik izomorf G-vel?

14. Válasszuk meg az x értékét úgy, hogy az alábbi sorozat egy olyan fa Prüfer-kódja legyen, amelyben minden pont fokszáma páratlan szám. Adjuk is meg ezt a fát! A sorozat: $1, 1, 5, x, 6, 6, 8$.

15. Hány pontja van annak a fának, amelyben a kétféle előforduló fokszám közül az egyik a 10, és pontosan 10 darab tizedfokú pontja van?

---

16. A fiókban m pár piros, n pár sárga és j pár zöld zokni van párosítatlanul. Hány darabot kell kivenni a sötétben ahhoz, hogy biztosan legyen közte egy azonos színű pár? És akkor hányat kell kivenni, ha egy piros/sárga/zöld pár zoknira van szükségünk?

17. Egy alkalommal Sherlock Holmes és Dr Watson közösen látogattak el egy (velük együtt) 10 tagú társaságba. Dr Watson – talán unatkozott – mindenkitől megkérdezte, hogy hány embert ismer a többiek közül (az ismeretségek kölcsönösek). Végül megmutatta a 10 választ Holmesnak: 2, 2, 7, 4, 3, 5, 6, 2, 6, 2. A nagy detektív mélyet szívott a pipájából, majd azt mondta:
— Valaki tévedett, vagy – ami rosszabb – szándékosan hazudott.
Honnan tudta?

18. Döntsd el, van-e olyan egyszerű gráf, amelyben a pontok foka rendre
(a) 1,2,2,3,3,3; (b) 1,1,2,2,3,4,4; (c) 2,3,3,4,5,6,7; (d) 1,3,3,4,5,6,6.

19. Bizonyítsd be, hogy egy egyszerű gráf és a komplementere közül legalább az egyik mindig összefüggő!

20. (a) Rajzolj olyan 4, 5, illetve 6 pontú egyszerű gráfot, amely izomorf a komplementerével!
    (b) Rajzold le az összes olyan fát, ami izomorf a komplementerével!
    (c) (*) Milyen n-ekre létezik n csúcsú, a komplementerével izomorf egyszerű gráf?

21. (a) n számozott ponton hány darab pontosan k élű egyszerű gráf van?
(b) És hányféle (akárhány élű) egyszerű gráf van?

22. Az n hosszúságú $0-1$ sorozatok legyenek egy gráf pontjai, két pont akkor és csak akkor legyen összekötve, ha a két sorozat pontosan egy koordinátájában tér el. Legalább hány élet kell ebből a gráfból elhagyni, hogy körmentessé váljon?

23. Mit mondhatunk arról a fáról, amely Prüfer-kódja csupa különböző számból áll?