Számítástudomány alapjai
12. gyakorlat

2007. december 6.

1. Milyen maradékot adhat 45-tel osztva az x szám, ha $12x \equiv 42 \pmod{45}$?

2. Oldd meg az alábbi lineáris kongruenciákat!
   (a) $5x \equiv 2 \pmod{11}$
   (b) $104x \equiv 74 \pmod{60}$
   (c) $40x \equiv 28 \pmod{62}$

3. A $\clubsuit\diamondsuit\heartsuit\spadesuit$ halmazon az ábrán megadott két műveletet értelmezzük (pl. $\diamondsuit + \clubsuit = \diamondsuit$).
   (a) Mennyi $((\spadesuit \times \diamondsuit) + \clubsuit) \times (\spadesuit + \diamondsuit)$?
   (b) Kommutatív-e ez a két művelet? Van-e egységelem? Van-e inverz?

$+$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$
$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$
$\heartsuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\spadesuit$
$\spadesuit$	$\spadesuit$	$\heartsuit$	$\diamondsuit$	$\clubsuit$

$\times$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$
$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$	$\clubsuit$
$\diamondsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$	$\diamondsuit$
$\heartsuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\heartsuit$
$\spadesuit$	$\clubsuit$	$\diamondsuit$	$\heartsuit$	$\spadesuit$

4. Döntsd el az alábbiakban megadott halmazokról és a rajtuk értelmezett műveletekről, hogy (a) a művelet asszociatív-e; (b) van-e egységelem; (c) mely elemeknek van inverze; (d) csoportot alkot-e a halmaz a művelettel?
   (a) a síkvektorok halmaza; a síkvektorok összeadása.
   (b) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok uniója.
   (c) egy tetszőleges X halmaz összes részhalmazainak halmaza; a halmazok szimmetrikus differenciája. (Az A és B halmazok szimmetrikus differenciája alatt az $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ halmazt értjük.)
   (d) a Föld elefántjainak halmaza; a $*$ műveletet a következőképpen értelmezzük: ha x és y két elefánt, akkor $x * y$ értéke legyen y.
   (e) az egész számok halmaza; az $a * b = a + b + 1$ képlettel megadott művelet.

---

5. Határozzuk meg az x kétjegyű egész számot, ha tudjuk, hogy $34x + 5$ utolsó két számjegye, valamint $17x + 10$ utolsó két számjegye megegyezik.

6. Legyen $H = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ és értelmezzük a H halmazon a $*$ műveletet az alábbi műveleti tábla szerint. (A táblázat szerint tehát például $a * c = e$ és $g * f = c$.)

$*$	a	b	c	d	e	f	g	h
a	d	g	e	a	c	h	b	f
b	g	d	h	b	f	e	a	c
c	e	h	a	c	d	b	f	g
d	a	b	c	d	e	f	g	h
e	c	f	d	e	a	g	h	b
f	h	e	b	f	g	a	c	d
g	b	a	f	g	h	c	d	e
h	f	c	g	h	b	d	e	a

Döntsd el, hogy a H halmaz csoportot alkot-e a $*$ műveletre nézve, ha azt már tudjuk, hogy $*$ asszociatív! (Az asszociativitást nagyon lassú volna ellenőrizni.)

7. Bizonyítsd be, hogy csoportban mindig megoldható az $a \cdot x = b$ egyenlet! (Ez tehát azt jelenti, hogy tetszőleges G csoport minden $a, b \in G$ eleméhez található olyan $x \in G$ elem, amelyre $a \cdot x = b$ teljesül.)

8. Döntsd el, hogy a megadott halmazok a rajtuk értelmezett művelettel félcsoportot illetve csoportot alkotnak-e? Melyik csoport lesz Abel-csoport?

   (a) a $H = \{\text{tik}, \text{tak}\}$ halmaz; az $x * y = \begin{cases} \text{tik}, & \text{ha } x = y \\ \text{tak}, & \text{ha } x \neq y \end{cases}$ utasítással megadott művelet.

   (b) az 5-tel nem osztható egész számok halmaza; az egész számok szorzása.

   (c) az 5-tel nem osztható egész számok halmaza; az egész számok összeadása.

   (d) a (-1)-től különböző valós számok halmaza; az $a * b = a \cdot b + a + b$ képlettel megadott művelet.

   (e) páros számok, szokásos összeadás,

   (f) páros számok, szokásos szorzás,

   (g) nemnegatív egész számok, szokásos összeadás.