Számítástudomány alapjai
11. gyakorlat

2007. november 29.

1. Hány olyan $n > 1$ egész szám van, melyre $\varphi(n) = 2005$? (ZH, 2005. május 27.)
2. Ha $6x \equiv 42 \pmod{21}$, akkor az alábbiak közül mi igaz biztosan?
   (a) $6x \equiv 0 \pmod{21}$
   (b) $6x + 2 \equiv 2 \pmod{21}$
   (c) $12x \equiv 84 \pmod{21}$
   (d) $3x \equiv 21 \pmod{21}$
   (e) $2x \equiv 14 \pmod{21}$
   (f) $2x \equiv 14 \pmod{7}$
3. Bizonyítsuk be, hogy $37^{16} - 1$ osztható 5-tel
4. (a) Melyik a nagyobb, $10^{10^{10}}$ vagy $(10^{10})^{10}$?
   (b) Határozzuk meg a $37^{39^{42}}$ utolsó két számjegyét.

---

5. Tudjuk, hogy az a egész számra teljesül, hogy $a^{100} \equiv 5 \pmod{31}$ és $a^{101} \equiv 19 \pmod{31}$. Milyen maradékot ad 31-gyel való osztáskor az a egész szám?
6. Határozzuk meg 303^{404} utolsó két számjegyét!
7. Bizonyítsuk be, hogy $\phi(n^3) = n^2 \cdot \phi(n)$
8. Mely n-ekre lesz $\phi(n)$ prímszám?
9. Milyen maradékot ad
   (a) 50^{50} 11-gyel osztva;
   (b) $n^{13} + 12n$ 13-mal osztva;
   (c) 22^{3202} 2005-tel osztva (ZH, 2005. december 6.);
   (d) $62^{81} - 81^{62}$ 25-tel osztva (ZH, 2003. május 13.);
   (e) $11^{11^{11}}$ 7-tel oszva (ZH, 2001. május 2.)?
10. Legyenek n és m olyan pozitív egészek, melyekre m osztója n-nek. Bizonyítsuk be, hogy $\phi(m)$ osztója $\phi(n)$-nek.
11. Relatív prím-e a $2^{100} - 1$ és $3^{100} - 1$?
12. Bizonyítsuk be, hogy ha d osztója n-nek, akkor $d - \varphi(d) \le n - \varphi(n)$.
13. Legyen $n > 1$ egész szám. Mutassuk meg, hogy ha összeadjuk az n-nél kisebb, n-hez relatív prím pozitív egész számokat, akkor az összeg $n\,\frac{\phi(n)}{2}$ lesz!
14. Határozzuk meg az összes olyan n egész számot, amelyre
$$5^n \equiv 3^n + 8 \pmod{26}$$
teljesül!
15. Mutasd meg, hogy ha az n egész szám nem osztható 17-tel, akkor $n^8 - 1$ vagy $n^8 + 1$ osztható 17-tel!