Számítástudomány alapjai
10. gyakorlat

2007. november 22.

1. Az alábbi két eldöntési probléma közül az egyik **P**-beli, a másik **NP**-teljes. Melyik melyik? Mindkét esetben bizonyíts!

   (a) **Input:** egy G gráf.
   Kérdés: van-e G-ben 27 pontú teljes részgráf?

   (b) **Input:** egy G gráf és annak x, y, z csúcsai.
   Kérdés: kiszínezhető-e G 3 színnel úgy, hogy x, y, z különböző színűek legyenek?

2. Mi az alábbi eldöntési problémák bonyolultsága? (Azaz **P**-beliek, vagy **NP**-teljesek?)

   (a) **Input:** G egyszerű gráf, k egész szám.
   Kérdés: van-e G-ben legalább k hosszúságú kör? (ZH, 2006. január 5.)

   (b) **Input:** G egyszerű gráf, k egész szám.
   Kérdés: van-e G-ben legfeljebb k hosszúságú kör?

3. Tegyük fel, hogy van egy P eljárásunk, amely egy input G gráfra és k számra 1 lépés alatt megmondja, hogy van-e G-ben legalább k méretű független ponthalmaz.
   (a) Tervezz olyan, a P eljárást használó algoritmust, amely polinom időben kiszámolja $\alpha(G)$-t!
   (b) Tervezz olyan, a P eljárást használó algoritmust, amely polinom időben talál egy $\alpha(G)$ méretű független ponthalmazt!

4. (a) Határozzuk meg az 504 és a 372 prímtényezős felbontását!
   (b) Mennyi $(504, 372)$? És $lkkt(504, 372)$?
   (c) Az Euklideszi algoritmussal is határozzuk meg $(504, 372)$-t!
   (d) Mennyi $d(504)$?

5. Egy XX. században született emberről azt tudjuk, hogy épp nagyapja 59. születésnapján született és hogy kettejük születési évszámai nem relatív prímek. Mikor született az ember?

6. Bizonyítsuk be, hogy ha az $n > 1$ számnak 2005 osztója van, akkor n nem lehet egy egész szám ötödik hatványa. (ZH, 2005. május 6.)

7. Bizonyítsd be, hogy a
   $$\frac{21n+4}{14n+3}$$
   tört semmilyen nemnegatív egész n-re sem egyszerűsíthető.

---

8. Mi az alábbi problémák bonyolultsága?

   (a) **Input:** egy G irányítatlan gráf.
   Kérdés: létezik-e G-ben olyan zárt élsorozat, amely egy kivételével minden élen pontosan egyszer megy át (és azon az egyen pedig egyszer sem)?

   (b) **Input:** egy G irányítatlan gráf.
   Kérdés: létezik-e G-nek olyan köre, mely legfeljebb 10 pont híján G minden csúcsát tartalmazza? (ZH, 2005. május 6.)

9. Mi a következő probléma bonyolultsága?

   Input: G gráf.
   Kérdés: kiszínezhetők-e G pontjai 4 színnel jól úgy, hogy az egyik színt legfeljebb 5 csúcs színezésekor használtuk? (ZH, 2004. május 13.)

10. Tegyük fel, hogy van egy P programunk, amely egy n csúcsú G gráfról egy időegység alatt megmondja, hogy az kiszínezhető-e 3 színnel. Tervezz olyan P-t használó algoritmust, amely polinom időben megtalálja G egy 3 színnel való színezését (ha van ilyen egyáltalán)!

11. Maximum hány szám választható ki 1-től $2n$-ig úgy, hogy közülük semelyik kettő se legyen relatív prím?

12. Határozzuk meg a legkisebb olyan 3-mal nem osztható számot, amelynek 21 osztója van!

13. Egy perzsa sahnak 100 felesége van, a börtönében is épp 100 rab sínylődik, 1-től 100-ig számozott cellákban. A börtöncellák zárjai „kétállásúak": ha egyet fordítanak rajtuk, a bezárt ajtó kinyílik, a nyitott ajtó bezáródik. A sah születésnapján a 100 feleség végigvonul a börtönön és a zárakkal játszanak. Az első feleség minden záron egyet fordít, a második feleség minden második ajtó zárján egyet fordít, stb., a k-adik feleség minden k-adik ajtó zárján egyet fordít, egészen a 100. feleségig. Végül azok a rabok, akiknek az ajtaja nyitva van, kiszabadulnak. Milyen sorszámú cellákban laknak a szerencsések?