# Adatbázisok elmélete 15. előadás

Csima Judit
Budapesti Műszaki és Gazdaságtudományi Egyetem
Számítástudományi Tsz.
I. B. 136/b
csima@cs.bme.hu

2003. Április 2.



## Teljességi tétel

**Tétel (Teljességi tétel).** *Ha $F \models X \to Y$, akkor $F \vdash X \to Y$.*

Bizonyítás: Tegyük fel indirekt, hogy van olyan $X \to Y$ függés és $F$ függéshalmaz, hogy $X \to Y$ nem vezethető le $F$-ből ($F \not\vdash X \to Y$), noha logikai következménye neki ($F \models X \to Y$).
Ez utóbbi azt jelenti, hogy minden olyan relációban, amiben $F$ függőségei teljesülnek, ha $X$-en megegyezik két sor, akkor azok megegyeznek $Y$-on is.
Úgy jutunk ellentmondásra, hogy konstruálunk egy olyan $r$ relációt, ahol $F$ függőségei teljesülnek, de $X \not\to Y$, ami ellentmond $F \models X \to Y$-nak.

| r | | | | | | | $X^+(F)$ | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | $X$ | | | | | | |
| | $A_1$ | … | … | | | | .................. | | | | … | … | $A_n$ |
| $t_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | .................. | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | .................. | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |





Tehát $r$ két soros reláció, $X^+(F)$-en megegyezik a két sor, a többin különbözik.
**Állítás.** *$r$-ben teljesülnek $F$ függései.*

Bizonyítás: Legyen $U \to V \in F$.
Ha $U \not\subseteq X^+(F) \implies U \to V$ igaz, hiszen nincs olyan két sor, ami $U$-n megegyezik.

Ha $U \subseteq X^+(F)$, akkor lemma miatt $F \vdash X \to U$.
Tranzitivitás miatt $F \vdash X \to V$. Lemma $\implies V \subseteq X^+(F)$, $V$-n megegyezik a két sor. $\surd$

**Állítás.** *$r$-ben nem igaz $X \to Y$.*

Bizonyítás: Mivel $F \not\vdash X \to Y$, ezért a fontos lemma miatt $Y \not\subseteq X^+(F)$, azaz $Y$ kilóg $X^+(F)$-ből, abból a részből, ahol a két sor egyenlő. Vagyis a két sor egyenlő $X$-en, de nem egyenlő $Y$-on, így $X \to Y$ nem igaz $r$-ben.

Tehát $r$ tényleg olyan, hogy benne $F$ minden függése fennáll, de $X \to Y$ nem, ami bizonyítja, hogy $F \not\models X \to Y$.

**Következmény.** *$\vdash$ és $\models$ felcserélhető.*





## Kulcs

**Definíció.** *$X \subseteq R$ **szuperkulcsa** az $(R,F)$ sémának, ha $F \vdash X \to R$. Másképpen, ha $R = X^+(F)$.*
*$X \subseteq R$ **kulcsa** az $(R,F)$ sémának, ha szuperkulcs és nincs olyan valódi részhalmaza, ami szuperkulcs.*

*Példa:*
$F = \{$TERMELŐ, TERMÉKNÉV $\to$ ÁR; TERMELŐ $\to$ CÍM $\}$
$X =$ TERMELŐ, TERMÉKNÉV
$\implies X^+(F) =$ TERMELŐ, TERMÉKNÉV, ÁR, CÍM
TERMELŐ$^+(F) =$ TERMELŐ, CÍM
TERMÉKNÉV$^+(F) =$ TERMÉKNÉV
$\implies X$ kulcs

## $X^+(F)$ kiszámítása

**Algoritmus:**
$X_0 = X$,
$\vdots$
$X_i = \dots$,
$X_{i+1} = X_i \cup \{A \in R \mid$ van olyan $U \to V \in F$, hogy $U \subseteq X_i$ és $A \in V\}$ ,
$\vdots$
$X^+(F) = X_{\text{utolsó}}$, (amikor már nem nő)

**Állítás.** *$X_{utolsó} \subseteq X^+(F)$ ( azaz, a fontos lemma miatt $F \vdash X \to X_{utolsó}$)*

Bizonyítás: Indukcióval $i$-re belátjuk, hogy $F \vdash X \to X_i$, innen már következik az állítás.
$i = 0$: $F \vdash X \to X_0 = X$, reflexivitás.

$i \rightsquigarrow i+1$

1. $U \to V \in F,\ U \subseteq X_i,\ A \in V$
2. $X_i \to U$, reflexivitás





3. $X \to U$, tranzitivitás + indukciós felt. $F \vdash X \to X_i$ + (2. sor)
4. $X \to V$, tranzitivitás (1. és 3. sor)
5. $V \to A$, reflexivitás, (1. sor)
6. $X \to A$, tranzitivitás, (4. és 5. sor)
7. $F \vdash X \to A$, minden $A \in X_{i+1}$
8. $F \vdash X \to X_{i+1}$

$\Longrightarrow F \vdash X \to X_{\text{utolsó}} \Longrightarrow$ (Lemma) $X_{\text{utolsó}} \subseteq X^+(F)$.

*Példa:*
$R(A,B,C,D)$, $\quad F = \{A \to B,\ B \to C,\ BC \to D\}$, $\qquad A^+(F) = ?$
$X_0 = \{A\}$, $\quad X_1 = \{A,B\}$, $\quad X_2 = \{A,B,C\}$, $\quad X_3 = \{A,B,C,D\} = X_{\text{utolsó}}$





**Állítás.** $X^+(F) \subseteq X_{utolsó}$

Bizonyítás: Tekintsük az alábbi kétsoros $r$ relációt: a két sor $X_{\text{utolsó}}$-n egyenlő, azon kívül eltérnek.

| r | | | | $X_{\text{utolsó}}$ | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $A_1$ | … | … | | | | $X$ ………………… | | | | … | … | $A_n$ |
| $t_1$ | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | ………………… | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| $t_2$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | ………………… | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |

$r$-ben egyrészt minden $F$-beli függés teljesül. (Bizonyítás, hasonlóan, mint a teljességi tételnél csak most az kell, hogy ha egy $W \to S$ függés esetén $W \subseteq X_{\text{utolsó}}$, akkor $S \subseteq X_{\text{utolsó}}$ is igaz, az algoritmus működése miatt.)
$r$ segítségével azt látjuk be, hogy ha $A \notin X_{\text{utolsó}}$, akkor $A \notin X^+(F)$, ami éppen a kívánt állítás.

Ha $A \notin X_{\text{utolsó}} \Longrightarrow r$ olyan reláció, amiben $X \not\to A$
ezért $F \not\models X \to A$, hiszen $r$-ben $F$ minden függése teljesül.





$\Longrightarrow$ (az igazság tétel miatt) $F \nvdash X \to A \Longrightarrow$ (fontos lemma) $A \notin X^+(F)$ $\quad\surd$

**Következmény.** *$X^+(F) = X_{utolsó}$, azaz tényleg jó az algoritmus.*
**Következmény.** *Adott $X$-ről el lehet dönteni, hogy (szuper)kulcs-e.*
Megnézzük, hogy $X^+(F) = R$ igaz-e. Ha igen, akkor szuperkulcs. Ha minden $X - A$-ra már nem szuperkulcsot kapunk, akkor $X$ kulcs.
Gyorsan implementálható (lásd mintavizsga utolsó példája).

## Felbontások

**Cél:** *Adott $(R,F)$ sémából anomáliát nem tartalmazó olyan felbontás előállítása, amiből ugyanaz az információ nyerhető, mint az eredetiből.*
**Definíció.** $\rho = (R_1,\ldots,R_k)$ *az* $(R,F)$ *séma felbontása, ha* $R_i \subseteq R$ *és* $\cup_{i=1}^{k} R_i = R$.
*Ha* $r$ *egy* $(R,F)$ *sémára illeszkedő reláció, akkor legyen* $r_i = \pi_{R_i}(r)$ *és*

$$m_\rho(r) := r_1 \bowtie r_2 \bowtie \cdots \bowtie r_k$$

*(Megj.:* $\bowtie$ *asszociatív, így nem kell a zárójelezéssel vesződni)*

Kérdés: mikor nyerhető vissza az infó a felbontásból? Mi általában $r$ és $m_\rho(r)$ viszonya?
**Tétel.** *(i)* $r \subseteq m_\rho(r)$
*(ii)* $r_i = \pi_{R_i}(m_\rho(r))$
*(iii)* $m_\rho\left(m_\rho(r)\right) = m_\rho(r)$

Bizonyítás: Ha $t$ egy sor, akkor $\pi_{R_i}(t)$ helyett $t[R_i]$-t írunk.





(i) Ha $t$ egy sor $r$-ben, akkor $t$ minden vetülete benne van a megfelelő $t[R_i]$-ben, ezek össze is illenek, így $m_\rho(r)$-ben is szerepelni fog $t$.

(ii) $r \subseteq m_\rho(r) \implies r_i = \pi_{R_i}(r) \subseteq \pi_{R_i}\left(m_\rho(r)\right)$.
Ha $t \in m_\rho(r)$, akkor ez természetes illesztéssel jött létre, $r_i$-beli sorokból, így levetítve $R_i$-re épp $r_i$ egy sorát kapjuk.

(iii) $m_\rho(r) = \bowtie_{i=1}^{k} r_i = \bowtie_{i=1}^{k} \pi_{R_i}(r)$
$m_\rho\left(m_\rho(r)\right) = \bowtie_{i=1}^{k} \pi_{R_i}\left(m_\rho(r)\right) \overset{(ii)}{=} \bowtie_{i=1}^{k} r_i = m_\rho(r)$

*Megjegyzés:* (i) szerint a szétszedés és összerakás után vagy pont $r$-t kapom meg, vagy többet kapok, kevesebb sor nem lehet. Ha $r \neq m_\rho(r)$, akkor ez nem egy túl hasznos felbontás. De ennél több is igaz: ebben az esetben teljesen reménytelen a felbontásból visszaszerezni $r$-t: mivel (ii) szerint $r$ és $m_\rho(r)$ (függőleges) vetületei ugyanazok, ezért ha $r \neq m_\rho(r)$, akkor *van két olyan reláció ($r$ és $m_\rho(r)$), aminek a vetületei ugyanazok $\implies$ a vetületekből nem lehet visszaállítani $r$-et (nem lehet eldönteni, hogy $r$ vagy $m_\rho(r)$ volt).*

Következmény: ha $r \neq m_\rho(r)$, akkor sehogyan se lehet visszahozni $r$-t a vetületekből.





## Hűséges felbontás

Tehát az a kérdés, hogy mik azok a felbontásai egy $(R,F)$ sémának, amik esetén tetszőleges $(R,F)$-re illeszkedő $r$ relációra $r = m_\rho(r)$

**Definíció.** *Adott* $(R,F)$. *Ennek* $\rho$ *felbontása **hűséges (veszteségmentes, lossless)**, ha minden* $(R,F)$*-re illeszkedő* $r$ *relációra* $r = m_\rho(r)$.

*Példa:* Legyen $(R,F)$ a következő: $R(A,B,C)$, $F = \{C \to A\}$ és legyen $r$ az alábbi





reláció.

| $r$ | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| | $a$ | $c$ | $e$ |
| | $a$ | $d$ | $f$ |
| | $b$ | $c$ | $g$ |
| | $b$ | $d$ | $h$ |

| $s$ | $A$ | $B$ |
|---|---|---|
| | $a$ | $c$ |
| | $a$ | $d$ |
| | $b$ | $c$ |
| | $b$ | $d$ |

| $t$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|
| | $c$ | $e$ |
| | $d$ | $f$ |
| | $c$ | $g$ |
| | $d$ | $h$ |

| $s \bowtie t$ | $A$ | $B$ | $C$ |
|---|---|---|---|
| | $a$ | $c$ | $e$ |
| | $a$ | $c$ | $g$ |
| | $a$ | $d$ | $f$ |
| | $a$ | $d$ | $h$ |
| | $b$ | $c$ | $e$ |
| | $b$ | $c$ | $g$ |
| | $b$ | $d$ | $f$ |
| | $b$ | $d$ | $h$ |

Ez a példa mutatja, hogy $r \neq s(A,B) \bowtie t(B,C)$, azaz ez a felbontás nem hűséges.

De $r = s'(A,C) \bowtie t'(B,C)$, majd látjuk.