Algoritmusok és gráfok
KILENCEDIK GYAKORLAT, 2019. november 13.

1. Az alábbi szomszédossági mátrix-szal adott G irányított gráfot járja be mélységi bejárással az első csúcsból.
(a) Milyen sorrendben érjük el a csúcsokat?
(b) Mik a csúcsok befejezési számai?
(c) Hogyan néz ki a futás végén a *honnan* tömb?
(d) Hogyan ágyazódnak egymásba a $DFS(G, v)$ függvényhívások?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Egy város úthálózata szomszédossági mátrixával adott irányítatlan gráffal van leírva, a csúcsok a kereszteződések, az élek pedig a kereszteződések közt vezető utak. Filmforgatás miatt néhány utcát lezárnak, tudjuk, hogy melyeket, ez az információ egy másik nxn-es L mátrixban van megadva úgy, hogy $L[i, j] = 1$, ha az i és j csomópont között lezárás van, egyébként $L[i, j] = 0$. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami a szomszédossági mátrix módosításával és egy tanult algoritmus változtatás nélküli futtatásaival eldönti, hogy el tudunk-e jutni otthonunkból (ami egy csúcspontja a gráfnak) az egyetemre (ami egy másik csúcsa a gráfnak) a felszínen, csak létező lezáratlan utakat használva.

3. Egy hat pontú irányított gráf csúcsait egy mélységi bejárás a, c, f, e, d, b sorrendben járja be, a befejezési számok pedig ezek: a: 6; b: 5; c: 4; d: 3; e: 2; f: 1.
(a) Lehetséges-e, hogy a gráfban van él f-ből e-be?
(b) Lehetséges-e, hogy a gráfban van él d-ből e-be?

4. Egy mátrixával adott irányítatlan G gráfban minden csúcs ki van színezve, piros, zöld vagy kék színre (ez az információ egy, a csúcsokkal indexelt C tömbben adott). Adott egy piros s és egy piros t csúcs, szeretnénk meghatározni az s-ből t-be vezető legrövidebb olyan út hosszát, ami csak piros csúcsokon megy át. Adjon erre a feladatra $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust.

5. (a) Hogyan zajlik az n pontú irányítatlan teljes gráf (ahol minden pont minden másik ponttal össze van kötve) szélességi bejárása? Hogy néz ki a BFS fa?
(b) Hogyan zajlik az n pontú irányítatlan teljes gráf mélységi bejárása? Hogy néz ki a DFS fa?

6. Egy kezdő autóvezető a városban való közlekedése során szeretne gyakorlatának megfelelő útvonalat választani. Az úthálózat egy irányítatlan gráfként van megadva, a csúcsok a kereszteződések, az élek az utak, a csúcsoknál adott, hogy nehéz-e számára az a kereszteződés. A gráf szomszédossági mátrixával adott, az az információ pedig, hogy mely kereszteződések nehezek, egy, a csúcsokkal indexelt N tömbben adott, ahol $N[v] = 1$, ha a csomópont nehéz, különben $N[v] = 0$.

   Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, amivel meg lehet határozni, hogy az autós az egyik adott csúcsnál levő otthonából mely csúcsokba tud autóval úgy eljutni, hogy útja során két nehéz csúcs soha nem jön közvetlenül egymás után.

7. A hat pontú G gráf csúcsait jelölje x, y, z, u, v, w. A gráf egy mélységi bejárásánál a csúcsokat x, y, u, v, w, z sorrendben érjük el, a befejezési számok bedig ezek: x: 6; y: 4; z: 5; u: 3; v: 1; w: 2. Adjuk meg a bejáráshoz tartozó mélységi feszítőfa éleit. Rekonstruálható-e G ezen adatok ismeretében?

8. Egy mátrixával adott irányított G gráfban szeretnénk meghatározni az összes olyan csúcsot, ahonnan egy adott t csúcs irányított úton elérhető. Adjon erre a feladatra $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust.

9. **(PZH 2018)** Egy szomszédossági mátrixával adott n csúcsú, egyszerű, irányított G gráfban kettő csúcs kivételével minden csúcs színes: piros vagy kék vagy zöld. A csúcsok színei egy, a csúcsokkal indexelt S tömbben adottak. A két színtelen csúcs s és t és az a célunk, hogy megkeressük az s-ből t-be vezető legrövidebb egyszínű utat. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami a szomszédossági mátrix (esetleg többszöri) módosításával és egy tanult algoritmus változtatás nélküli futtatásaival megoldja ezt a feladatot.