Algoritmusok és gráfok
NEGYEDIK GYAKORLAT, 2019. október 4.

1. A tanult összefésülés eljárást hajtsa végre az $1, 3, 10, 21$ és $2, 5, 6, 8$ rendezett tömbökön, lépésről lépésre jelezve, hol tartunk a két input tömbben és hogyan változik a kimeneti tömb.

2. Futassa le a $8, 1, 10, 23, 7, 2, 9, 11, 4$ inputon az összefésüléses rendezést.

3. **(Vizsga 2018)** Az órán tanult összefésülés eljárást futtatjuk az $1, 3, 5, 9$ és $2, 10, y, 15, 16$ rendezett tömbökön, ahol y értéke nem ismert.
   (a) Hány összehasonlításban vesz részt a 9-es érték és miért?
   (b) Hány összehasonlításban vesz részt az y elem és miért?

4. Adott egy tömbben $n \geq 2$ darab különböző szám és szeretnénk megtalálni azt a párt, melynek különbsége minimális (vagyis keressük a legközelebbi számpárt). Adjon erre a feladatra $O(n \log n)$ összehasonlítást használó algoritmust.

5. **(ZH 2018)** Egy $n \geq 3$ elemű rendezett tömbben pontosan három különböző érték szerepel. Adjon $O(\log n)$ lépésszámú algoritmust ennek a három értéknek a megkeresésére. Például ha az input $0, 0, 1, 1, 1, 8$, akkor az elvárt kimenet $0, 1, 8$.

6. Egy tömbben $n \geq 2$ darab egész számot tárolunk, ugyanaz a szám többször is szerepelhet. Határozzuk meg $O(n \log n)$ lépésben
   (a) az összes olyan számot, ami többször szerepel
   (b) a leggyakoribb számokat, vagyis azokat, amelyeknél többször semelyik másik szám sem fordul elő a tömbben.

7. Egy csupa különböző egészekből álló sorozat *bitonikus*, ha először nő, utána pedig fogy, vagy fordítva: először fogy, utána nő. Például az $(1, 3, 7, 21, 12, 9, 5)$, $(9, 7, 5, 4, 6, 8)$ és $(1, 2, 3, 4, 5)$ sorozatok bitonikusak. Adjunk $O(n)$ összehasonlítást használó rendező algoritmust n elemű bitonikus sorozatok rendezésére!

8. Legyen adott egy egészekből álló n méretű A tömb valamint egy b egész szám. Szeretnénk eldönteni, hogy vannak-e olyan $A[i]$ és $A[j]$ elemek a tömbben, melyek összege b. Oldjuk meg ezt a feladatot $O(n \log n)$ lépésben!

9. Egy tömböt nevezzünk csinosnak, ha benne a számok egy darabig nőnek, aztán meg végig csökkennek. Adjon $O(\log n)$ lépésszámú algoritmust, ami megtalálja egy csinos tömb töréspontját: azt az indexet, ahol a fordulat bekövetkezik.

10. Az n méretű A tömb elemei különböző pozitív egész számok. Adjon algoritmust, amely meghatároz egy $1 \leq k \leq n$ számot és kiválaszt k különböző elemet az A tömbből úgy, hogy a kiválasztott elemek összege nem több mint k^3. Ha nincs ilyen k, akkor az algoritmus jelezze ezt a tényt. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(n \log n)$. (Két szám összehasonlítása, összeadása vagy szorzása egy lépésnek számít.)

11. Adott egy n darab csupa különböző egész számot növekvő sorrendben tartalmazó tömb. (A tömbben negatív számok is lehetnek!) Adjunk $O(\log n)$ lépésszámú algoritmust egy olyan i index meghatározására, melyre $A[i] = i$ (feltéve, hogy van ilyen i).

12. A csupa különböző valós számokból álló $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sorozatot szeretnénk úgy átrendezni, hogy az új sorrendben $a_{i_0} < a_{i_1} > a_{i_2} < a_{i_3} \ldots$ teljesüljön.
    Adjon erre a feladatra $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust.

13. Egy különböző egész számokat tartalmazó tömbben két elem akkor áll inverzióban, ha $i < j$, de $A[i] > A[j]$, vagyis a nagyobb szám megelőzi a kisebbet. (Például a 15 és a -3 inverzióban áll a $8, 15, 1, 10, -3$ tömbben.)
    (a) Hány inverzió van a $2, 5, 1, 10, 3$ tömbben?
    (b) Adjon triviális (brute-force) algoritmust az inverziók számának meghatározására! Mennyi ennek az algoritmusnak a lépésszáma?
    (c) ($\star$) Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú algoritmust a feladatra.
    (Segítség: próbáljuk meg meglovagolni az összefésüléses rendezést.)