Algoritmusok és gráfok - Vizsga
2019. január 16.

A válaszokat indokolni kell. A feladatokban szereplő tanult algoritmusokat csak annyira kell leírni, amennyire az az indokláshoz szükséges.

1. Az alábbi pszeudokód inputja két tömb: az n hosszú A tömb egész számokat tartalmaz, a szintén n hosszú B tömb pedig csupa 0-ból áll. Az eljárás outputja az M szám. Mutassa meg, hogy az eljárás lépésszáma $O(n)$.

```
B[0]: = A[0]
ciklus i = 1-tól (n-1)-ig:
     B[i] := max(A[i], B[i-1] + A[i])
ciklus vége
M:= B[0]
ciklus  j= 1-tól (n-1)-ig:
    ha B[j] > M:
         M:= B[j]
ciklus vége
```

2. Tanultunk egy eljárást, amivel DAG-ban meg lehet találni a legrövidebb utak hosszát a kezdőcsúcsból minden más csúcsba. Az algoritmus során a gráf v csúcsaira sorban meghatározzuk a *távolság*$[v]$ értékeket, a topologikus sorrend szerint haladva. Az eljárás lelkét az alábbi (részben hiányos) képlet alkotja:

$$\textit{távolság}[v] = \min_{u \to v}\{\boxed{}\}$$

Egészítse ki a fenti formulát, magyarázza el a használt jelöléseket is. Mutassa meg, hogy ha minden, a topologikus sorrendben v-t megelőző csúcsra helyes a *távolság* értéke, akkor a fenti képlet helyesen adja meg a távolságot a v csúcsra.

3. Az alábbi 11 méretű hash táblába nyílt címzéssel, lineáris próbával szúrtunk be néhány egész számot majd egyet közülük kitöröltünk, így az alábbi állapotot kaptuk ($*$ jelöli a törölt cellát, a kitöltetlen cellák mindvégig üresek voltak). A használt hash függvény a $h(K) =$ K maradéka 11-gyel osztva függvény volt.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	4	*	3	15		6	18			22

Ebben a táblázatban egyetlen olyan szám van, amire igaz, hogy ha ezt a számot kitöröljük, majd újra beszúrjuk, akkor a szám egy másik helyre kerül vissza. Melyik ez a szám? Válaszának indoklására mutassa be, hogy hogyan zajlik ennek a számnak a törlése és beszúrása.

4. Egy egyszerű, irányított G gráfon BFS-t (szélességi bejárást) futtattunk az A csúcsból. A csúcsokat A, C, B, D, E, F sorrendben látogattuk meg, a BFS feszítőfa élei AC, AB, CD, BE, BF.

(a) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él E-ből D-be?
(b) Lehetséges-e, hogy a G gráfban van él C-ből E-be?
Válaszait indokolja!

5. Egy bináris keresőfában a $7, 9, 15, 16, 20$ számokat tároljuk valamilyen elrendezésben. Rajzolja fel a fát, ha tudjuk, hogy a fát preorder bejárással bejárva a $9, 7, 15, 20, 16$ sorrendben látjuk az elemeket. Röviden magyarázza el, hogy miért csak ez lehet a fa alakja.

6. Szomszédossági mátrixával adott egy n csúcsú, egyszerű, irányított G gráf. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust, ami G mátrixából előállítja annak az irányítatlan G_1 gráfnak a szomszédossági mátrixát, aminek csúcsai megegyeznek G csúcsaival és G_1-ben pontosan akkor van két csúcs összekötve, ha G-ben valamelyik irányban volt él közöttük.

7. Mátrixával adott egy város úthálózatának élsúlyozott, irányított gráfja: a csúcsok a csomópontok, az élek a csomópontok közötti közvetlen utak, az élek súlya pedig azt mutatja, hogy mennyi az átlagos idő, ami az út megtételéhez autóval szükséges.

   Útfelújítások miatt a következő héten le fogják zárni a város két csomópontját, a-t és b-t (ezeken nem lehet autóval áthaladni). Adott a gráfban két kijelölt csúcs, S és T és azt szeretnénk eldönteni, hogy az a és b csomópontok lezárása miatt növekedni fog-e az S-ből T-be eljutás ideje és ha igen, akkor mennyivel. (Tételezzük fel, hogy a közvetlen utakhoz rendelt átlagos idők nem változnak a lezárások következtében.) Melyik tanult algoritmust lehet alkalmazni, hogyan és miért, ha $O(n^2)$ lépésben meg akarjuk oldani ezt a feladatot (a szokásos módon n a csomópontok számát jelöli)?

8. Adott egy n különböző egész számot tartlamazó A tömb, ebben szeretnénk három olyan számot találni, hogy közülük bármely kettő különbsége legfeljebb 2019 legyen. Adjon $O(n \log n)$ lépésszámú eljárást erre a feladatra.