Algoritmusok és gráfok
EXTRA FELADATOK, 2018 ősz

Az extra feladatokat írásban lehet beadni az előadáson vagy le lehet adni a tanszéki adminisztrációban a nevemre (IB133) vagy el lehet küldeni pdf-ben a csima@cs.bme.hu címre, a feladatnál adott határidőig. Határidő előtt is be lehet adni és ha nem jó, de még van idő, akkor lehet újra próbálkozni. Minden jól megoldott extra feladat +1%-ot számít a félév végi jegyben (feltéve, hogy az aláírást sikerül megszerezni és a vizsga is sikeres).

1. (**határidő: szeptember 13.**) Adjunk olyan algoritmust, amely $\lceil 1.5n \rceil - 2$ összehasonlítással megtalálja n elem közül a legnagyobbat és legkisebbet! (Itt $\lceil 1.5n \rceil$ az $1.5n$ felső egészrészét jelöli, ami $1.5n$-nel egyenlő, ha n páros és az $1.5n$ után jövő legkisebb egész számmal egyenlő, ha n páratlan.)
   Segítség: nézzük először csak azt az esetet, amikor n páros szám.

2. (**ez nehéz, határidő: szeptember 20**.) Adott n chip, melyek képesek egymás tesztelésére a következő módon: ha összekapcsolunk két chipet, mindkét chip nyilatkozik a másikról, hogy hibásnak találta-e. Egy hibátlan chip korrektül felismeri, hogy a másik hibás -e, míg egy hibás chip akármilyen választ adhat. Tegyük fel, hogy a chipek több, mint a fele korrekt. Adjunk algoritmust, mely n-nél kevesebb fenti tesztet használva kikeres egy jó chipet.

3. (**határidő: szeptember 20.**) Adott egy $n \times n$-es táblázat, melyben egész számok szerepelnek. Adjon $O(n^2 \log n)$ összehasonlítást használó algoritmust, amely eldönti, van-e két olyan sor, amelyek teljesen megegyeznek. Egy összehasonlításban két darab egész számot tudunk összehasonlítani.
   Segítség: az összefésüléses rendezés lépészáma $O(n \log n)$.

4. (**határidő: szeptember 27.**) A különböző valós számokból álló $a_0, \ldots, a_{n-1}$ sorozatot szeretnénk úgy átrendezni, hogy az új sorrendben
   $a_{i_0} < a_{i_1} > a_{i_2} < a_{i_3} \ldots$ teljesüljön.
   Adjon erre a feladatra $O(n)$ lépésszámú algoritmust.

5. (**határidő: október 4.**) Watson doktor azzal áll Sherlock Holmes elé, hogy talált egy olyan összehasonlítás-alapú rendező algoritmust, ami akármelyik n méretű input tömböt helyesen rendezi úgy, hogy eközben a tömb mindegyik eleme legfeljebb 2018-szor vesz részt összehasonlításban és az algoritmus során összesen $17n$ darab mozgatás történik legfeljebb. Hogyan tudja megmutatni Sherlock Holmes Watsonnak, hogy téved, az algoritmusa nem lehet jó?

6. (**határidő: október 11.**) Egy n csúcsú bináris fa (nem feltétlenül bináris keresőfa) csúcsaiban egész számokat (pozitív és negatív számok is lehetnek) tárolunk. Szeretnénk meghatározni azt a csúcsát a fának, aminek a részfájában az értékek összege a lehető legnagyobb. (Egy csúcs részfájába a csúcs maga és az összes leszármazottja tartozik bele.) Adjon erre a feladatra O(n) lépésszámú eljárást.

7. (**határidő: október 18.**) Egy k szintű teljes bináris fa olyan bináris fa, ahol minden szint tele van. Órán láttuk, hogy egy ilyen fában $2^k - 1$ csúcs van. Tegyük fel, hogy egy k szintű teljes bináris keresőfában az $\{1, 2, 3, \ldots, 2^k\}$ számok közül tárolunk $2^k - 1$-et, vagyis egy szám hiányzik. Adjon $O(k)$ lépésszámú (tehát a szintek számával arányos lépésszámú) algoritmust ennek a számnak a megtalálására.
   Segítség: rajzoljon le néhány 3 szintű ilyen fát és próbáljon valami szabályszerűséget találni :).

8. (**határidő: október 25.**) Bizonyítsa be, hogy egy olyan buliban, ahol legalább két ember van, biztosan van két olyan ember, akinek ugyanannyi ismerőse van a buliban. Az ismeretségekről

tegyük fel, hogy kölcsönösek.
Segítség: Ezen a héten a gráfokról kezdtünk tanulni.

9. (**határidő: november 8.**) Éllistával adott a súlyozott élű irányítatlan $G = (V, E)$ gráf. Tegyük fel, hogy az élek súlyai az 1,2,3 számok közül valók. Adjon $O(n+e)$ költségű algoritmust az $s \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására. (Itt egy út hossza az úton található élek súlyainak összege.)

10. (**határidő: november 15.**) Éllistával adott egy irányított G gráf, melynek n csúcsa és e éle van. A gráf minden csúcsához hozzá van rendelve egy 1 és k közötti egész szám (címke). Találjunk (ha létezik) olyan utat a gráfban, amelyben minden $1 \leq i \leq k$ címke pontosan egyszer fordul elő. Az algoritmus lépésszáma legyen $O(k!\,(e+n))$.

11. (**határidő: november 22.**) Adjunk algoritmust, mely egy n csúcsú, éllistával megadott egyszerű irányítatlan gráfról $O(n)$ lépésben eldönti, hogy van-e benne kör, függetlenül attól, hogy ez élek száma akár sokkal nagyobb is lehet, mint n.

12. (**határidő: november 29.**) Egy $n \times n$ méretű táblázat minden eleme egy egész szám. A táblázat első oszlopából akarunk eljutni az utolsó oszlopba úgy, hogy minden lépésben egy oszlopnyit megyünk jobbra és vagy ugyanabban a sorban maradunk, ahol voltunk, vagy felfele vagy lefele egy sorral arrébb lépünk. Egy ilyen (n cellából álló) út értéke a benne szereplő számok összege. Adjon $O(n^2)$ futási idejű algoritmust, ami meghatározza, hogy az adott táblázatban a szabályok szerinti utak értékei között mekkora a legnagyobb! Hogyan lehet megtalálni magát az utat?

13. (**határidő: december 13.**) A mátrixával adott G irányított gráf élei között van egy negatív súlyú él, a többi él súlya pozitív. A gráfban nincs negatív súlyú kör. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust az $s \in V(G)$ pontból az összes többi pontba vezető legrövidebb utak meghatározására.