

Algoritmusok és gráfok
ELSŐ GYAKORLAT, 2018. szeptember 7.

1. A síkon adott n darab különböző pont: $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$. Célunk, hogy megtaláljuk azt a pontpárt, melyek legközelebb vannak egymáshoz.
 - (a) Írja le triviális algoritmust erre a feladatra, szövegesen magyarul vagy pszeudokóddal.
 - (b) Miért helyes ez az algoritmus? (Miért biztos, hogy jó választ ad?)
 - (c) Mennyi az algoritmus lépésszáma, azaz legfeljebb hány elemi műveletet végzünk az algoritmus során n darab pont esetén, ha egy elemi műveletnek két érték összehasonlítását, illetve két szám összeadását, kivonását, szorzását és a gyökvonást tekintjük? A lépésszámot próbálja pontosan kiszámolni, aztán pedig adja meg az ordó jelölést használva is.
2. Igaz-e, hogy egy algoritmus lépésszáma $O(n^2)$, ha tudjuk, hogy a lépésszám
 - (a) $10n^2 - n \log n$,
 - (b) $n + n^2 + n^3$,
 - (c) 2^n ,
 - (d) $10000 \log \log n$
3. Mi a tagadása az alábbi állításoknak? (Két állítás akkor tagadása egymásnak, ha a két állítás közül minden esetben pontosan az egyik igaz.) Igazak ezek az állítások?
 - (a) Minden pénteken van Algoritmusok és gráfok gyakorlat.
 - (b) Minden Algoritmusok és gráfok előadás csütörtökön van.
 - (c) Minden olyan hallgató, aki jár gyakorlatra, átmegy a vizsgán.
 - (d) Minden olyan 17 lábú zsiráf, aki jár gyakorlatra, átmegy a vizsgán.

4. A világ jelenleg leggyorsabb szuperszámítógépének maximális sebessége 187,659 petaflops (peta = 10^{15} , FLOPS = FLOating-point Operations Per Second).
 - (a) Tegyük fel, hogy van egy olyan algoritmusunk, ami 2^n lépést tesz egy n méretű inputon. Mekkora a legnagyobb n érték, amire igaz, hogy ez a szuperszámítógép befejezi a munkát egy nap alatt egy n méretű inputon?
 - (b) Mennyi ideig tart az (a) pontban kapott méret esetén egy 3^n lépésszámú algoritmus futtatása ugyanezen a gépen? Hogy viszonyul ez a világegyetem korához?
 - (c) Mennyi ideig tart az (a) pontban kapott méret esetén egy n^2 lépésszámú algoritmus futtatása ugyanezen a gépen?
5. Lássa be, hogy egy algoritmus lépésszámára pontosan akkor igaz, hogy $O(\log_2 n)$, amikor az igaz rá, hogy $O(\log_3 n)$. (Tanulság: mindegy, hogy milyen alapú logaritmust használunk.)
6. Adott n darab különböző egész szám (pozitív és negatív számok is lehetnek).
 - (a) Adjunk triviális algoritmust annak eldöntésére, hogy van-e köztük 3 olyan szám, amiknek az összege 100. Mennyi az algoritmus lépésszáma?
 - (b) Adjunk triviális algoritmust annak eldöntésére, hogy van-e köztük 10 olyan szám, amiknek az összege 100. Mennyi az algoritmus lépésszáma?
 - (c) Adjunk triviális algoritmust annak eldöntésére, hogy van-e köztük néhány szám, amiknek az összege 100. Mennyi ennek az algoritmusnak a lépésszáma?
 - (d) Mekkora inputon képes lefuttatni ezeket az algoritmusokat a 187,659 petaflops-os szuperszámítógép egy nap alatt?
7. (★) Tegyük fel, hogy van egy olyan algoritmusunk, ami csupán összehasonlításokat használva képes megtalálni n szám közül a legkisebbet. lássa be, hogy ez az algoritmus biztosan használ legalább $n - 1$ összehasonlítást.
Segítség: az algoritmus elején bármelyik szám lehet a legkisebb (mert még nem tudunk semmit róluk) és akkor ér véget az eljárás, ha már csak egy jelölt maradt.