Algoritmuselmélet
6. heti feladatsor
Megoldások

1. Az $\{a, b, c\}$ feletti L nyelv álljon azokból a szavakból, melyekben van olyan c betű, ami előtt (a szóban bárhol) álló a karakterek száma hárommal több, mint a mögötte (a szóban bárhol) álló b karakterek számának kétszerese. Például *aababcaacaaacb* benne van a nyelvben (a második c betű jó lesz), *babaabca* is benne van a nyelvben, de *aabcabaacbbab*, *aac* és ε nincsen.

   Adjon környezetfüggetlen nyelvtant erre az L nyelvre és indokolja is meg, hogy az adott nyelvtan miért éppen ezt a nyelvet generálja.

   Megoldás
   A nyelvtan logikája ez lesz: először $A^{2n+3}CB^n$ alakú szavakat ($0 \leq n$) generálunk, ahol C-ből lesz majd a jó "középső" c, az A változó pedig a pontosan egy a-betűt (de esetleg több b és c betűt) tartalmazó szavak nyelvét állítja majd elő, B pedig a pontosan egy b-betűt (de esetleg több a és c betűt) tartalmazó szavak nyelvét fogja generálni.

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow AASB \mid AAAC \\
A &\rightarrow bA \mid cA \mid Ab \mid Ac \mid a \\
B &\rightarrow aB \mid cB \mid Ba \mid Bc \mid b \\
C &\rightarrow Cc \mid Ca \mid c
\end{aligned}
$$

   A nyelvtan minden levezetése a fenti logikát követi: S-től csak úgy tudunk megszabadulni, hogy az első és a második, a két S baloldalú szabály alkalmazásával éppen egy $A^{2n+3}CB^n$ alakú szót ($0 \leq n$) állítunk elő, az A változókból pedig egy-egy a, a B változókból pedig pont egy b lesz, így a C-ből generált c előtti a-k és utáni b-k számára teljesül a feltétel.

   Másrészt ha egy szóban van jó c betű, ami előtt $2n + 3$ a, utána pedig n darab b betű áll, akkor ezen szó levezethető úgy, hogy az első és a második szabály alkalmazásával levezetjük $A^{2n+3}CB^n$-t, majd az első A-ból levezetjük az első a-ig bezárólag a szó elejét, a második A-ból az első a utáni részt a második a-ig, ..., az utolsó A-ból pedig az utolsó előtti a utáni részt a középső c-ig, illetve hasonlóan az első B-ből levezethető a középső c után álló első b-ig tartó rész, a második B-ből az első b utáni rész a második b-ig bezárólag, ..., az utolsó B-ből pedig az utolsó előtti b utáni rész. Ha a jó c után nincsen b egyáltalán, akkor pedig a C-re vonatkozó szabályok segítségével tudunk a-kat és c-ket generálni a jó középső c után.

2. Adott egy irányítatlan G gráf, melynek minden éléhez egy (nem feltétlenül pozitív) egész szám van rendelve, ez az él súlya. A feladat az, hogy keressünk G-ben egy olyan maximális összsúlyú élhalmazt, mely legfeljebb 137 élből áll és ahol G minden csúcsára legfeljebb 2 kiválasztott él illeszkedik. Írja át ezt a feladatot egészértékű lineáris programozási feladattá és magyarázza is el az adott konstrukciót.
   Megoldás

   - Feleltessünk meg a gráf minden e élének egy x_e változót (azaz annyi változónk lesz, ahány éle a gráfnak van). Minden x_e változóra lesz egy $0 \leq x_e \leq 1$ egyenlőtlenségünk, ahol $x_e = 1$ felel meg annak, ha az e élet kiválasztjuk.
   - Mivel 137 élet szabad csak választani, ezért lesz egy $\sum_{e \in E(G)} x_e \leq 137$ egyenlőtlenségünk: ez korlátozza be, hogy legfeljebb 137 x_e értéke lehet 1, azaz legfeljebb 137 élet választunk.
   - Minden v csúcsára a gráfnak lesz egy olyan egyenlőtlenségünk, ami azt fejezi ki, hogy a v-re illeszkedő élek $E(v)$-vel jelölt halmazából legfeljebb 2 él van kiválasztva: $\sum_{e \in E(v)} x_e \leq 2$
   - Ezen feltételek mellett keressük az alábbi célfüggvény maximális értékét: $\sum_{e \in E(G)} c_e \cdot x_e$. Ez azért jó, mert a választott élekre lesz csak $x_e = 1$, a többi élre x_e értéke nulla, azaz a célfüggvény éppen a kiválasztott élek súlyainak összege.