Algoritmuselmélet
5. heti feladatsor
Megoldások

1. Igazolja vagy cáfolja, hogy az alábbi CF nyelvtan egyértelmű.

$$\begin{aligned} S &\to aaX \mid aYb \\ X &\to Zb \\ Z &\to aaX \mid \varepsilon \\ Y &\to aYb \mid bYa \mid ba \mid ab \end{aligned}$$

Megoldás
A nyelvtan egyértelmű, ehhez definíció szerint azt kell megmutatnunk, hogy minden levezetett szónak csak egy levezetési fája van.

Azt lehet észrevenni, hogy S-ből kétféle szabállyal lehet elindulni és ha az aaX jobboldalú szabállyal indulunk, akkor csak az X-es és Z-s szabályokat tudjuk használni később (felváltva), ha pedig az aYb jobboldalú szabállyal kezdünk, akkor csak az Y baloldalú szabályokat tudjuk ezután használni.

Ha az aaX jobboldalú szabállyal kezdünk, akkor a levetés biztosan ilyen alakú lesz:

$$S \Rightarrow aaX \Rightarrow aaZb \Rightarrow aaaaXb \Rightarrow aaaaZbb \Rightarrow \ldots \Rightarrow a^{2n}Xb^{n-1} \Rightarrow a^{2n}Zb^n \Rightarrow a^{2n}b^n$$

Vegyük észre, hogy csak annyi választásunk van ezen az ágon, hogy n értékének megfelelően hány lépés után állunk le a levezetéssel és a generált szavak $a^{2n}b^n$ alakúak.

Ha az aYb jobboldallal indítunk, akkor viszont csak olyan szavakat tudunk levezetni, amikben ugyanannyi a van, mint b, mert mind az első lépésben, mind a későbbi Y- baloldalú szabályokban egyszerre rakunk le mindig egy a-t és egy b-t.

Ez azt jelenti, hogy ha egy szó levezethető a nyelvtanban, akkor amennyiben az a-k száma a b-k kétszerese, akkor csak az első ágon kaphattuk ezt meg és ott is csak egyféleképpen, egy levezetési fával: ami $A \to aaX$ szabállyal kezdődik és utána felváltva használjuk az $X \to Zb$ és $Z \to aaX$ szabályokat, amíg megfelelő számú a és b karaktert elő nem állítunk.

Ha pedig egy levezett szóban az a-k és a b-k száma ugyanakkora, akkor az csak a második ágon jöhetett ki és itt is csak egyértelműen, mert a levezetési fa konstruálásakor mindig egyértelmű, hogy melyik szabályt kell használnunk aszerint, hogy a vagy b karaktert kell generálnunk illetve, hogy befejeződik-e már levezetés vagy sem.

2. Tekintsük azt az L nyelvet, amiben olyan (G, u) párok vannak, ahol G egy páratlan sok csúcsból álló irányítatlan gráf, u ennek egy csúcsa és G-ben van olyan Hamilton-út, aminek u éppen a középső csúcsa. Bizonyítsa be, hogy ez az L nyelv NP-teljes.

Megoldás
Azt fogjuk belátni, hogy ez a probléma NP-ben van és mutatni fogunk egy Karp-redukciót az s-t-HAMILTON-ÚT problémáról erre a nyelvre. Ezután az Iszonyú Hasznos Lemmából már következik, hogy a nyelv NP-teljes, mert s-t-HAMILTON-ÚT NP-teljes.

A nyelv NP-beliségéhez: egy jó input esetén a tanú egy jó Hamilton-út, felsorolva a csúcsokat az úton elfoglalt helyük szerinti sorrendben. A tanú hossza $O(n \log n)$, mert n csúcsot kell felsorolnunk és egy csúcs $O(\log n)$ bittel írható le. A tanú ellenőrzésekor megnézzük, hogy minden csúcs pontosan egyszer szerepel (ez megtehető $O(n)$-ben) és hogy u a középső (ez is $O(n)$). Világos, hogy pontosan akkor van jó tanú, ha az input gráfnak van olyan Hamilton-útja, ahol u a középső csúcs.

A redukció az s-t-HAMILTON-ÚT-ról legyen a következő:
(G, s, t)-hez rendeljünk a következő (G', u) párt:

Vegyük G-t két példányban és vegyünk fel három új csúcsot x_1, u, x_2-t és kössük össze x_1-et az első G példány s csúcsával, u-t az első G példány t csúcsával és a második G példány s csúcsával, x_2-t pedig a második G példány t csúcsával. Ez a hozzárendelés gyors.

(Elvileg azokhoz az inputokhoz is rendelnünk kéne valamit, amik nem (G, s, t) alakúak, de ettől most tekintsünk el.)

Ha G-ben van H-út s és t lözött, akkor G'-ben egy jó H-út lesz az, hogy x_1-ből az első G s csúcsába megyünk, onnan követjük a G-beli H-utat t-ig, onnan u-ba, majd u-ból a második G példány s csúcsába megyünk, majd innen megint a G-beli H-út mentén eljutunk t-be, majd innen x_2-be. Ez az út G' minden csúcsát bejárja és az u csúcs éppen középen van benne.

Ha G'-ben van H-út, aminek közepe u, akkor ez út szükségkéépen (x_1, s) éllel kezdődik az első G példánynál és (t, x_2) éllel végződik a másodiknál (hiszen x_1 és x_2 elsőfokú csúcsok) és az u csúcsot csak a (t, u), (u, s) éleken át járhatja be. Vagyis akkor az első gráf csúcsait csak egy s-ből t-be vezető úton keresheti fel, azaz van s-t-Hamilton út G-ben.