

NP-teljesség

1. Tegyük fel, hogy $P \neq NP$ és $L_1 \in P$. Lehetséges-e, hogy
 - (a) egy NP-teljes L_2 nyelv L_1 Karp-redukálható?
 - (b) egy NP-teljes L_2 nyelv Karp-redukálható L_1 -re?
 - (c) az L_1 nyelv NP-beli?

2. S-T-HAMÚT jelöli az olyan (G, s, t) hármasokból álló nyelvet, ahol a G irányítatlan gráf s és t csúcsa között van Hamilton-út. Igazolja, hogy az alábbi nyelvekre az S-T-HAMÚT nyelvről van Karp-redukció!
 - (a) HAMÚT: a Hamilton-úttal rendelkező gráfok nyelve
 - (b) HAM: a Hamilton-körrel rendelkező gráfok nyelve

3. Mutassa meg, hogy az alábbi nyelvek NP-teljesek!
 - (a) az olyan G gráfokból álló nyelv, amelyek kiszínezhetőek 3 színnel úgy, hogy mindegyik színt ugyanannyiszor használjuk.
 - (b) az olyan (G, a, b, k) négyesekből álló nyelv, ahol G egy irányítatlan gráf, $a, b \in V(G)$, $k > 0$ egész szám és G -ben van olyan út a és b között, aminek a hossza legalább k .
 - (c) az olyan (G, a, b) hármasokból álló nyelv, ahol G egy irányítatlan gráf, $a, b > 0$ egész számok és a G gráfnak van a $K_{a,b}$ teljes páros gráffal izomorf feszített részgráfja.
 - (d) az olyan G irányítatlan gráfokból álló nyelv, amelyekre G -ben van olyan C kör, hogy minden $v \notin C$ csúcs össze van kötve éllel a C valamely csúcsával.

4. Az alábbi problémák mindegyikében a bemenet egy $G(V, E)$ irányítatlan gráf és a gráf pontjainak egy $S \subseteq V$ részhalmaza. Határozza meg, melyik esetben kapunk P-beli, mikor NP-teljes problémát!
 - (a) **Kérdés:** Van-e olyan feszítőfa G -ben, melyben S minden eleme levél?
 - (b) **Kérdés:** Van-e olyan feszítőfa G -ben, melynek levelei pontosan az S -beli pontok?
 - (c) **Kérdés:** Van-e olyan feszítőfa G -ben, melynek levelei az S -beli pontok közül valók?

5. Tekintsük azt a problémát, hogy egy adott G irányítatlan súlyozott gráfban mekkora a maximális súlyú út súlya! Adja meg, mi lesz az ehhez tartozó nyelv, és lássa be, hogy az NP-teljes!

6. Egy n emberből álló szervezetben b féle bizottság működik. Bizottsági ülések időpontját akarjuk kitűzni. Két különböző bizottság ülése akkor lehet azonos napon, ha nincs olyan ember, aki mindkét bizottságnak tagja. Legyen adott egy k pozitív egész szám és minden bizottsághoz a tagok névsora. Azt szeretnénk eldönteni, hogy az összes bizottság ülése lebonyolítható-e k napon belül. Vagy adjon egy, a kívánt beosztást megtaláló polinomiális algoritmust, vagy mutassa meg, hogy a feladathoz tartozó nyelv NP-teljes.

7. Egy hivatal egy új, E emeletes épületbe fog költözni. Az épület minden emeletén ugyanakkora terület használható fel irodák kialakítására. Minden részleg megmondta, hogy összesen mekkora irodaterületre tart igényt. Azt akarjuk eldönteni, hogy megoldható-e a költözés úgy, hogy egyetlen részleg se legyen kettévágva, azaz egy részleg teljes egészében egy emeleten legyen (de egy emeletre kerülhet több részleg is). Mi lesz a problémához tartozó nyelv? Ez a nyelv P-ben van vagy NP-teljes?

8. P-beli vagy NP-teljes az a feladat, ahol adottak az a_1, \dots, a_n egész számok és az a kérdés, hogy ez a számhalmaz szétosztható-e három részre úgy, hogy mindhárom rész összege ugyanannyi legyen?