Karp-redukció

1. Igazolja, hogy 2SZÍN $\prec$ 3SZÍN és hogy 3SZÍN $\prec$ 100SZÍN ! Mit mondanak ezek a Karp-redukciók a 3 nyelv bonyolultságáról?

   Megoldás: Kezdjük a végén! A felírt állítások intuitív jelentése az, hogy a 3SZÍN legalább olyan nehéz, mint a 2SZÍN és legfeljebb olyan nehéz, mint a 100SZÍN.

   Pontosabban, az első nem ad újat ahhoz képest, hogy tudjuk, a 2 színnel színezhetőség polinom időben eldönthető, a 3 színnel színezhetőség pedig NP-teljes. A második Karp-redukció, ha még azt is meggondoljuk, hogy a 100SZÍN nyelv NP-ben van, akkor azt mutatja, hogy ez a nyelv is NP-teljes (azaz általában a 100 színnel színezhetőség se nem könnyebb. se nem nehezebb a 3 színnel színezhetőségnél).

   Tudjuk, hogy 2SZÍN $\in$ P $\subseteq$ NP és hogy a 3SZÍN nyelv NP-teljes. Az NP-teljesség definíciójából következik az első Karp-redukció létezése.

   A másodikhoz módosíthatjuk az előadáson látott 3SZÍN $\prec$ 4SZÍN bizonyítást. Tetszőleges G gráfból úgy készül $f(G) = G'$, hogy a csúcshalmazt kiegészítjük 97 további csúccsal, ezek legyenek összekötve G minden csúcsával és egymással is. Ezzel egy polinom időben számolható f függvényt definiáltunk, G szomszédossági mátrixát kiegészítjük 97 további sorral, oszloppal, az új, nem diagonális elemek mind 1-ek.

   Ha $G \in$ 3SZÍN, akkor G'-re egy ilyen színezés kiterjeszthető: az új csúcsok az eddigiektől és egymástól is különböző színt kapnak, amihez összesen 100 szín elég. Másrészt, ha $G' \in$ 100SZÍN, akkor egy jó színezésében a G csúcsai legfeljebb 3 színnel vannak színezve, tehát ilyenkor valóban $G \in$ 3SZÍN.

   Ha precízek akarunk lenni, a Karp-redukció értékét minden bemenetre, a nem gráfokra is meg kell adni. Könnyű látni, hogy ha f nem változtat az ilyen bemeneten, az jó lesz mivel ilyenkor biztos, hogy a bemenet nem gráf, így se a 3SZÍN, se a 100SZÍN nyelvben nincs benne. Az meg, hogy ez az eset áll fenn, polinom időben eldönthető. Tehát az f számolása azzal kezdődik, hogy ellenőrzi, hogy a kapott x bemenet gráfot ad meg vagy sem, ha nem, akkor $f(x) = x$, különben meg a fent leírt módon módosított gráf lesz f értéke.

   1. Megjegyzés: a 2SZÍN $\prec$ 3SZÍN igazolására is használhattuk volna a 3SZÍN $\prec$ 4SZÍN visszavezetésnél látott konstrukciót.

   2. Megjegyzés: Mivel általában annak ellenőrzése, hogy a bemenet egy gráf (vagy általában az, hogy formailag jó) általában megy polinom időben, ezért f-et sokszor csak a formailag jó bemeneteken adjuk meg.

2. Mutassa meg, hogy ha $X \prec Y$, akkor $\overline{X} \prec \overline{Y}$ is igaz.

   Megoldás: Ugyanaz az f függvény jó lesz, hiszen $x \in X \Leftrightarrow f(x) \in Y$ pontosan akkor teljesül, amikor $x \notin X \Leftrightarrow f(x) \notin Y$

3. Az L nyelv az olyan G egyszerű gráfokból áll, melyeknél a csúcsok színezéséhez kell legalább 4 szín. Igazolja, hogy a PRÍM $\prec L$ Karp-redukció létezik!

   Megoldás: A PRÍM $\prec L$ Karp-redukció létezéséhez elegendő megmutatni, hogy a komplementerek között van Karp-redukció, $\overline{\text{PRÍM}} \prec \overline{L}$. Tudjuk, hogy $\overline{\text{PRÍM}}$ = ÖSSZETETT $\in$ NP. Azt fogjuk belátni, hogy $\overline{L}$ egy NP-teljes nyelv, és akkor az NP-teljesség definíciója miatt készen vagyunk. Ehhez elegendő azt észrevenni, hogy a "kell legalább 4 szín" komplementer tulajdonsága az, hogy "3 szín elég", azaz lényegében a 3SZÍN nyelvről van szó, ami valóban NP-teljes.

   Kicsit pontosabban, $\overline{L}$ a 3SZÍN nyelvnek és a nem gráfokat leíró bemeneteknek az uniója, amire a 3SZÍN nyelv könnyen Karp-redukálható úgy, hogy először ellenőrizzük, hogy a bemenet gráfot ír le. Ha nem, akkor megfeleltetjük neki a 4 pontú teljes gráfot, amihez nyilván kell 4 szín, egyébként meg, ha gráfot ír le, akkor saját magát.

   Megjegyzés: A komplementer nyelv helyett általában elegendő a komplementer tulajdonsággal foglalkozni, hiszen az ez által meghatározott nyelv csak a formálisan nem jó bemenetekben különbözik a komplementer nyelvtől.

4. Adjon meg egy HAM $\prec$ s-t-HAMÚT Karp-redukciót!

   Megoldás: Egy tetszőleges $G(V, E)$ gráfhoz készítsük el a (G', s, t) hármast a következőképpen: Válasszuk ki egy csúcsát G-nek, ez lesz s. A G' csúcshalmazát egészítsük ki egy új elemmel, $V' = V \cup \{t\}$. A G'-ben megtartjuk a G éleit, az új t csúcs szomszédai egyezzenek meg az s szomszédaival, $E' = E \cup \{\{t, v\} : \{s, v\} \in E\}$. Ez a konstrukció polinom időben elvégezhető (a mátrixhoz egy új sort és oszlopot kell hozzávenni, amelyek megegyeznek s sorával, oszlopával).

   Még azt kell megmutatni, hogy $G \in$ HAM $\Leftrightarrow$ $(G', s, t) \in$ s-t-HAMÚT. Ha $G \in$ HAM, akkor ha G'-ben elkezdjük ezt a Hamilton-kört s-ből követni de az utolsó éllel nem s-ben bezárjuk, hanem a megfelelő új éllel t-be lépünk, akkor a G' egy s-ből t-be vivő Hamilton-útját kapjuk. Visszafelé pedig, a G' egy s és t pontot összekötő Hamilton-útjából úgy kaphatjuk G egy Hamilton-körét, ha az út utolsó éle helyett a neki megfelelő éllel az s-be lépünk G-ben.

5. Bizonyítsa be, hogy ha $L_1 \prec L_2$ és $L_2 \in$ NP, akkor $L_1 \in$ NP.

   Megoldás: Ha $L_1 \prec L_2$, akkor van olyan M_1 DTG, ami $O(n^k)$ időben kiszámolja a redukció $f(x)$ függvényét. Mivel $L_2 \in$ NP, van olyan M_2 NTG, aminek nyelve L_2 és futásideje $O(n^l)$. Legyen M az a NTG, ami x inputon el?ször kiszámítja $f(x)$-et, majd $f(x)$-en futtatja M_2-t. A f tulajdonságai miatt világos, hogy M nyelve L_1, futásideje pedig $O(n^{kl})$ lesz. Ezért $L_1 \in$ NP.

6. Tudjuk, hogy $L_1 \prec L_2$ és hogy az L_2 komplementere Karp-redukálható a PARTÍCIÓ nyelvre. Igazolja, hogy ekkor $L_1 \in$ co NP !

   Megoldás: A második feltétel szerint $\overline{L_2} \prec$ PARTÍCIÓ, és mivel PARTÍCIÓ NP-teljes (és így NP-beli), ezért $\overline{L_2} \in$ NP. Az első feltétel szerint $L_1 \prec L_2$, amiből $\overline{L_1} \prec \overline{L_2}$ következik. Ezért $\overline{L_1}$ is NP-ben van, ami a co NP definíciója miatt ekvivalens az $L_1 \in$ co NP tulajdonsággal.

7. Igazolja, hogy léteznek az alábbi Karp-redukciók! (a) RH $\prec$ HAM (b) ÖSSZEFÜGGŐ $\prec$ 3SAT (c) ÖSSZEFÜGGŐ $\prec$ PÁROS

   (ÖSSZEFÜGGŐ az összefüggő gráfok nyelve, PÁROS meg a páros gráfoké)

   Megoldás: (a) RH $\in$ NP (sőt, NP-teljes), HAM NP-teljes, tehát a Karp-redukció az NP-teljesség definíciója miatt létezik.

   (b) ÖSSZEFÜGGŐ $\in$ P $\subseteq$ NP és 3SAT NP-teljes, tehát a Karp-redukció az NP-teljesség definíciója miatt létezik.

   (c) ÖSSZEFÜGGŐ $\in$ P és PÁROS $\in$ P is teljesül. Legyen a Karp-redukció a következő: ha az x bemenet nem gráf, akkor $f(x) = x$, különben pedig ellenőrizzük, hogy a megadott gráf összefüggő. Ha igen, akkor legyen $f(x)$ egy él, különben meg egy háromszög. Mivel az összefüggőség polinom időben eldönthető, ezért ez az f polinom időben számolható. Ha a gráf összefüggő, akkor a képe (egyetlen él) páros gráf, ha meg nem összefüggő, akkor a képe K_3, ami nem páros gráf.

8. Adjon Karp-redukciót a PARTÍCIÓ problémáról a RH problémára!

   Megoldás: Legyen $f : (s_1, s_2, \ldots, s_n) \mapsto (s_1, s_2, \ldots, s_n; b)$, ahol $b = \sum s_i/2$, ha ez a b egész szám, különben meg pl. $(2, 2; 1)$. Ez az f egy megfelelő Karp-redukció mert csak lineárisan sok összeadás kell hozzá, hogy a b-t kiszámoljuk, és az RH megoldása megegyezik a PARTÍCIÓ megoldásával.

9. Igazolja, hogy ha co NP $\neq$ NP, akkor MAXKLIKK $\notin$ P.

   Megoldás: Indirekt: Ha MAXKLIKK $\in$ P, akkor a komplementere is P-ben van, tehát MAXKLIKK $\in$ co NP. Viszont az NP-teljessége miatt minden $L' \in$ NP nyelvre teljesül, hogy $L' \prec$ MAXKLIKK, amiért $L' \in$ co NP is igaz. Tehát NP $\subseteq$ co NP.

   Ha most $L'' \in$ co NP, akkor a definíció miatt $\overline{L''} \in$ NP, amiből az előbb kapott tartalmazás szerint $\overline{L''} \in$ co NP is következik, tehát $L'' \in$ NP.

   A feltevésünkből ezek szerint az NP $=$ co NP is következik, ami ellentmond a feladatnak.

10. Igazolja, hogy ha egy X eldöntési probléma NP-teljes és $X \in \mathrm{NP} \cap \mathrm{co\,NP}$, akkor $\mathrm{NP} = \mathrm{co\,NP}$.

    Megoldás: Mivel X NP-teljes ezért minden $L \in \mathrm{NP}$ probléma esetén $L \prec X$, amiből $X \in \mathrm{co\,NP}$ miatt $L \in \mathrm{co\,NP}$ jön, tehát $\mathrm{NP} \subseteq \mathrm{co\,NP}$.

    A fordított irányú tartalmazást hasonlóan láthatjuk be, mint az előbb: tetszőleges $L \in \mathrm{co\,NP}$ problémára teljesül, hogy $\overline{L} \in \mathrm{NP}$, tehát $\overline{L} \prec X$ az X NP-teljessége miatt, amiből $\overline{L} \in \mathrm{co\,NP}$ következik. Tehát $L \in \mathrm{NP}$, azaz $\mathrm{co\,NP} \subseteq \mathrm{NP}$, és így $\mathrm{NP} = \mathrm{co\,NP}$

11. Tegyük fel, hogy van egy eljárásunk, ami egy tetszőleges Boole-formuláról polinom időben eldönti, hogy a SAT nyelvnek eleme vagy nem. Hogyan lehet ezt felhasználva polinom időben megtalálni egy adott $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ formulához a változóknak egy olyan értékelését, amelyet ha a φ-be behelyettesítünk, akkor a formula értéke igaz lesz?

    Megoldás: Először adjuk be az eljárásnak magát a φ formulát. Ha a válasz az, hogy nincs megoldás, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben legyen $i = 1$ és helyettesítsünk x_i helyébe hamis értéket. Legyen φ_0 az a formula, amit így φ-ből kapunk. Adjuk oda ezt az eljárásnak. Ha a válasz az, hogy továbbra is van megoldás, akkor legyen $\varphi = \varphi_0$, különben pedig $\varphi = \varphi_1$, ahol az utóbbi azt jelzi, amit az x_i helyébe igazat behelyettesítve kapunk. (Vegyük észre, hogy ha φ_0 nem, akkor φ_1 biztos kielégíthető.) Hajtsuk végre ugyanezt az $i = 2, 3, \ldots, n$ választással.

    Ezen a módon a változóknak sorban értéket adunk. Mivel minden i esetén x_i-nek olyan értéket választunk, amihez a hátralevő változók megválaszthatók úgy, hogy a formula igaz legyen, a végén, amikor minden változót rögzítettünk, az érték igaz lesz.

    Lépésszám: legyen az eredeti eljárás lépéspészáma az n változós formulákon $O(n^c)$. Ezt n-szer hívjuk meg, mindig legfeljebb n változós formulára. Ezért a lépésszáma $O(n^{c+1})$.

    Megjegyzés: lehet, hogy az eredeti formulához több jó kiértékelés is van, ez a módszer ezekből egyet fog megtalálni, a lexikografikusan legelsőt.

12. Tegyük fel, hogy van egy eljárásunk, ami egy tetszőleges n csúcsú gráfról polinom időben megmondja, hogy van-e benne Hamilton-kör. Hogyan lehet ezt felhasználva polinom időben megtalálni egy adott G gráfban egy Hamilton-kört?

    Megoldás: Először adjuk be az eljárásnak a G gráfot. Ha az a válasz, hogy nincs benne Hamilton-kör, akkor készen vagyunk.

    Különben legyenek a G gráf élei $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Az $i = 1, 2, \ldots m$ értékekre sorban csináljuk a következőt:

    Hagyjuk el a gráfból az f_i élet, jelölje a kapott gráfot G'. Adjuk be ezt a gráfot az eljárásnak. Amennyiben az a válasz, hogy van benne Hamilton-kör, akkor $G = G'$-vel folytatjuk az eljárást. Ha nincs benne, akkor viszont nem változtatjuk meg G-t.

    Vegyük észre, hogy az aktuális G-ben mindig lesz Hamilton-kör, de elhagyunk minden élet, ami ehhez “nem fontos”. A végén a gráfban kizárólag egy Hamilton-kör élei maradnak meg, így itt már könnyű ezt ,,megtalálni”.

    Lépésszám: Legyen az eredeti eljárás lépésszáma az n csúcsú gráfokon $O(n^c)$. Ezt m-szer hívjuk meg, $m < n^2$. Egy él elhagyása megoldható $O(n)$ lépésben, tehát az egész együtt $O(m(n^c + n))$, azaz polinomiális.

    Megjegyzés: Lehet, hogy eredetileg több Hamilton-kör is van a gráfban. Mindig azt ellenőrizzük, hogy marad-e az f_i elhagyása után is Hamilton-kör, és ha igen, akkor egy kevesebb élű gráffal folytatjuk.