

P, NP

1. Álljon az  $L$  nyelv azokból az irányítatlan gráfokból, melyekben nincs kör. Igazolja, hogy  $L \in P$ .
2. Az  $L$  nyelv álljon az olyan  $(G, s, t)$  hármasokból, ahol  $G$  egy irányított gráf,  $s$  és  $t$  a gráfnak két csúcsa és  $G$ -ben van út  $s$ -ből  $t$ -be. Igazolja, hogy  $L \in P$ .
3. Álljon az  $L$  nyelv azokból az  $(n, m)$  párokból, amelyekben  $n$  és  $m$  egy-egy pozitív egész szám bináris alakja, és ez a két szám relatív prím. Igaz-e, hogy  $L \in P$  ?
4. Bizonyítsa be az alábbi két nyelvről, hogy NP-beliek! Melyikről tudja belátni, hogy P-ben van? Melyikről látja, hogy coNP-beli?
  - (a)  $G$  irányítatlan gráfok nyelve, amelyekben van legfeljebb 100 élből álló kör.
  - (b)  $(G, k)$  párokból álló nyelv, ahol a  $G$  irányítatlan gráfban van legfeljebb  $k$  élből álló kör.
5. Igazolja, hogy a
  - (a)  $\text{MAXKLIKK} = \{(G, k) : G \text{ irányítatlan gráfban van } k \text{ pontú klikk}\}$  nyelv NP-ben van.
  - (b)  $\text{5KLIKK} = \{G : G \text{ irányítatlan gráfban van } 5 \text{ pontú klikk}\}$  nyelv
    - NP-ben van,
    - co NP-ben van,
    - P-ben van.
6. Bizonyítsa be, hogy az alábbi nyelvek coNP-beliek!
  - (a) Az olyan páros gráfok nyelve, amelyekben van teljes párosítás.
  - (b) Az olyan gráfok nyelve, amelyekben van teljes párosítás.
  - (c) A síkbarajzolható gráfok nyelve.
  - (d) Az olyan gráfok nyelve, amelyekben akárhogyan színezzük ki az éleket 2 színnel, mindig keletkezik egyszínű háromszög.
7. Álljon a nyelv az olyan  $(G, t)$  párokból, ahol  $G$  egy súlyozott, irányítatlan gráf,  $t > 0$  egész, és  $G$ -ben minden,  $t$  darab élből álló párosítás súlya legalább  $t^2$ . Igazolja, hogy ez a nyelv coNP-ben van!
8. Legyen  $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  olyan polinom időben kiszámolható, bijektív függvény, aminél minden  $x \in \{0, 1\}^*$  szóra teljesül, hogy  $|f(x)| = |x|$ . Legyen  $L = \{y : \text{van olyan } 1\text{-gyel kezdődő } x, \text{ amire } f(x) = y\}$ . Igaz-e, hogy  $L \in \text{NP} \cap \text{coNP}$ ?
9. Igazolja, hogy az a nyelv, ami az összes olyan  $M$  determinisztikus véges automata leírásából áll, melyre  $L(M) \neq \emptyset$  teljesül, NP-ben van.