

Turing-gép még mindig

1. Adjon 1-szalagos Turing-gépet a $\{0^{2^n} : n \geq 0\}$ nyelvhez! Nem szükséges precízen megadni az átmeneteket, elegendő a működés elvét leírni.

Megoldás: Az első 0-t átírjuk 1-re, ez jelöli majd az input elején az első 0-t. Jobbra haladva minden második 0-t átírjuk x-re. Ha az utolsót nem írtuk át, akkor páratlan hosszú volt az input, elutasítjuk. Ha átírtuk, akkor páros hosszú volt és a megmaradt 0-k száma feleződött. Visszamegyünk az elejére és megint minden második 0-t átírjuk x-re. Az útközben talált x-eken csak jobbra lépünk. Ezt addig ismételjük, amíg lehet. Ha végül nem marad 0, csak az elején az 1-es, akkor elfogadjuk.

2. Adjon Turing-gépet a $\{ww : w \in \{0,1\}^*\}$ nyelvhez! Nem szükséges precízen megadni az átmeneteket, elegendő a működés elvét leírni.

Megoldás: 2 szalagos gépet készítünk. Először megjelöljük a 2. szalag elejét, majd lemásoljuk az egész inputot a 2. szalagra. Visszafelé haladva az 1. szalagon csak minden második lépésben mozdítjuk a fejet balra, így amikor a 2. szalagon visszaérünk az elejére, akkor az 1. szalagon a fej középen lesz. Ezután jobbra haladva a 2. szalagon a szó első felét karakterenként össze tudjuk hasonlítani az 1. szalagon a szó második felével.

3. Legyen $\Sigma = \{0, 1, +\}$. Vázzon egy Turing-gépet, amelyik az $x+y$ alakú inputon (ahol $x, y \in \{0, 1\}^*$ nem üres bitsorozatok) egy idő után megáll, és az 5. szalagon az x és y binárisan felírt számok összege áll. Adjon becslést a Turing-gép lépésszámára!

Megoldás: Használjunk 5 szalagot. Először a bemenetről a + -ig terjedő részt (x) a szokott módon lemásoljuk a 2. szalagra (előtte megjelölve a szalag elejét). Majd a következő részt (y) hasonlóan átmásoljuk a 3. szalagra. Álljunk vissza a fejjel a 2. és 3. szalag utolsó nem üres mezőjére (azaz x és y utolsó bitjére), hiszen az összeadást az utolsó bitnél jó kezdeni.

A 4. szalagra írjuk az összeget a szám végéről kezdve. Az összeadásnál két állapotot használunk, az egyik jelképezi, hogy volt átvitel az előző számjegy összeadásából, a másik meg, hogy nem volt. Ennek megfelelően a két állapotban mást-mást írunk a 4. szalagra ugyanannál az olvasott karakterpárnál. Végül a 4. szalagon fordított sorrendben levő eredményt másoljuk a jó sorrendben az 5. szalagra.

A lépésszám $O(n)$.

4. Oldjuk meg az előző feladatot összeadás helyett szorzás esetére is.

Megoldás: Az iskolában tanult algoritmusot kell megvalósítani. A lépésszám $O(n^2)$.

5. Vázzon egy Turing-gépet, ami a diagonális nyelv komplementerét fogadja el. Megáll-e minden bemeneten a kapott Turing-gép?

Megoldás: Először megvizsgáljuk, hogy az input (w) tényleg egy Turing-gép leírása-e. Ha nem, akkor elfogadjuk. Ha igen, akkor elkezdjük szimulálni a megadott gépet a saját kódján futtatva: A 2. szalagra lemásoljuk w -t és azon végzünk minden műveletet, amit az adott gép végezne. A 3. szalagon a szimulált gép aktuális állapotát tartjuk nyilván. Minden lépésben kódban meg van adva, hogy mit kell lépni a 2. és 3. szalagon olvasott adatok alapján. Könnyű olyan Turing-gépet konstruálni, ami bármely bemenetre, így a saját-kódjára is, végtelen ciklusba kerül. Ha fent konstruált Turing-gépnek ez a bemenete, akkor a szimulálás is végtelen ciklusba fog kerülni. Tehát nem fog minden bemenetre megállni.

6. Vázzon egy Turing-gépet, ami az alábbi nyelvet fogadja el!

$$L = \{w\#x : \text{az } M_w \text{ elfogadja az } x \text{ első öt karakteréből álló szót}\}$$

Megáll-e minden bemeneten a kapott Turing-gép?

Megoldás: Először megvizsgáljuk, hogy az input w része tényleg egy Turing-gép leírása-e. Ha nem, akkor

elutasítjuk az $w\#x$ inputot. Ha igen, akkor elkezdjük szimulálni a w -vel megadott M_w gépet az x első öt karakteréből álló y szón: A 2. szalagra lemásoljuk y -t és azon végzünk minden műveletet, amit az M_w gép végezne. A 3. szalagon a szimulált M_w gép aktuális állapotát tartjuk nyilván. Minden lépésben a kódban (átmeneti függvényben) meg van adva, hogy mit kell lépni a 2. és 3. szalagon olvasott adatok alapján. Ha a szimulált M_w gép leáll, akkor mi is leállunk és elfogadunk pontosan akkor, ha M_w elfogadott. Ha tehát $w\#x$ benne volt a nyelvben, azaz M_w elfogadja az x első öt karakteréből álló y szót, akkor mi is le fogunk állni és elfogadjuk $w\#x$ -t, azaz az L nyelv szavait elfogadjuk. Ha $w\#x$ nincs benne az L nyelvben, akkor M_w vagy le sem áll az x első öt karakteréből álló szón, de ekkor mi sem állunk le a szimulációval tehát nem fogadjuk el $w\#x$ -t, vagy pedig M_w elutasítva leáll az x első öt karakteréből álló szón, de ekkor mi is elutasítva állunk le a szimulációval tehát nem fogadjuk el $w\#x$ -t. Mivel lehetséges olyan M_w Turing-gépet konstruálni, ami bármely bemenetre végtelen ciklusba kerül, ezért a most vázolt eljárás minden ilyen w -hez tartozó $w\#x$ pár esetén végtelen ciklusba fog kerülni, tehát nem fog minden bemenetre megállni.