NP-teljesség még mindig és EP

1. Lássa be, hogy a TSP feladat NP-teljes.
   A TSP feladatban azt kell eldönteni egy élsúlyozott teljes G gráfról és egy k egész számról, hogy van-e G-ben olyan Hamilton-kör, melynek súlya legfeljebb k.

   Megoldás: TSP NP-ben van, mert jó tanú a jó Hamilton-kör, ami megadható például a csúcsok jó sorrendben való felsorolásával. A tanú hossza $O(n \log n)$, mert n csúcsot kell felsorolni, mindegyik leírható $O(\log n)$ bittel. A tanú ellenőrzése során megnézzük, hogy mindegyik csúcs egyszer szerepel (ez megtehető a tanú egyszeri végignézésével és annak nyilvántartásával, hogy melyik csúcsot láttuk már), illetve megnézzük, hogy a szomszédos csúcsok között valóban van él a szomszédossági mátrix szerint (ehhez is csak egyszer kell végigmennünk a csúcsok sorrendjén), eközben össze is adjuk az élek súlyát, ez az eljárás a tanú hosszával arányos lépésszámú.

   Az NP-teljesség ezután az Iszonyú Hasznos Lemmából jön ki, mert HAM visszavezethető TSP-re a következő módon: minden G gráfhoz rendeljük azt a G-vel azonos csúcsszámú élsúlyozott teljes gráfot, melyben a G-ben szereplő élek súlya 1, a G-ben nem szereplő élek súlya 2. Legyen továbbá a TSP-ben így kapott gráfhoz tartozó k értéke G csúcsszáma, amit jelöljünk n-nel.

   Ez a hozzárendelés $O(n^2)$ lépéssben megtehető.

   Ha G-ben van H-kör. akkor ezen H-kör minden éle 1 súlyú a teljes gráfban, vagyis itt van n súlyú H-kör.

   Ha a teljes gráfban van n súlyú H-kör, akkor az csak G-beli éleket tartalmazhat (mert n darab élet kell kiválasztanunk és mindegyik súlya 1 vagy 2 lehet csak), vagyis ekkor G-ben is van H-kör.

2. Adjon Karp-redukciót a PARTÍCIÓ problémáról a Ládapakolás feladat eldöntési verziójára. (Ebből következik, hogy a Ládapakolás feladat NP-teljes, mert az belátható, hogy Ládapakolás NP-ben van.)

   Megoldás: Legyen $\{s_1, s_2, \ldots, s_n\}$ a PARTÍCIÓ feladat inputja és jelöljük S-sel az összes s_i szám összegének a felét, azaz legyen $S = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} s_i}{2}$. Rendeljük ehhez hozzá az inputhoz a Ládapakolás alábbi inputját: a tárgyak mérete legyen $\{\frac{s_1}{S}, \frac{s_2}{S}, \ldots, \frac{s_n}{S}\}$ és legyen k =2.

   $\Rightarrow$: Ha ketté lehet osztani az s_i-ket úgy, hogy az összeg mindkét részben ugyanannyi (azaz S), akkor ezen felosztásnak megfelelően a tárgyak összmérete a Ládapakolás problémában éppen 1 mindkét részben, azaz 2 ládába beférnek.

   $\Leftarrow$: Ha beférnek a tárgyak a Ládapakolásnál két ládába, akkor az csak úgy lehet, ha mindkét láda pont tele van, azaz a ládákban levő tárgyak összmérete éppen S mindkét részben, azaz a két rész összege ugyanakkora.

3. Írja le egészértékű programozási feladatként az alábbi problémák optimalizálási változatát!
   (a) MAXKLIKK
   (b) MAXPÁROSÍTÁS
   (c) Minimális lefogó ponthalmaz keresése egyszerű, irányítatlan gráfban

   Megoldás:

   (a) Az adott G gráfban maximális klikket keresünk, amibe a megfelelő csúcsokat kell beválasztani. Ezért a változók feleljenek meg a csúcsoknak.

   A feltételek: $x_i \geq 0$, $x_i \leq 1$ minden $1 \leq i \leq |V(G)|$ esetén és $x_i + x_j \leq 1$ minden $\{i, j\} \notin E(G)$.

   A célfüggvény: $\max \sum_i x_i$

   Ez jó: Tekintsünk egy teljes részgráfot G-ben. Ekkor ha $x_i = 1$ a kiválasztott csúcsokra, egyébként meg $x_i = 0$, akkor ezek a változók teljesítik az egyenlőtlenségeket, mert két nem összekötött pont közül legfeljebb az egyik tartozik a teljes részgráfhoz.

   Másrészt ha az x_i-k az egyenlőtlenségeket teljesítő egész számok, akkor mindegyik változó értéke 1 vagy 0, Azokat a csúcsokat kiválasztva, melyekre $x_i = 1$ egy teljes részgráfot kapunk, mert olyan pontpárból, amelyek nincsenek összekötve, legfeljebb az egyik lehet benne.

A célfüggvény pont azt írja le, hogy a maximális méretűt keressük.

(b) Az adott G gráfban maximálisan sok független élet keresünk, azaz most az élek beletartozásáról kell dönteni. Ezért a változók feleljenek meg az éleknek.

A feltételek: $x_i \geq 0$, $x_i \leq 1$ minden $1 \leq i \leq |E(G)|$ esetén és $x_i + x_j \leq 1$ ha az f_i és f_j éleknek van közös csúcsa.

A célfüggvény: $\max \sum_i x_i$

Ez jó: Tekintsünk egy párosítást. Ekkor ha a párosítás éleire $x_i = 1$, egyébként meg $x_i = 0$, akkor ezek a változók teljesítik az egyenlőtlenségeket. Másrészt ha az x_i-k az egyenlőtlenségeket teljesítő egész számok, akkor mindegyik változó értéke 1 vagy 0, és azokat az éleket kiválasztva, melyekre, $x_i = 1$ egy párosítást kapunk, mert minden csúcsra csak egy olyan él illeszkedhet, amire $x_i = 1$.

A célfüggvény pont azt írja le, hogy a maximális méretűt keressük.

(c) Ez egy minimalizálási feladat, de a mi EP változatunk maximalizálás. Egy lehetséges megoldás, hogy észrevesszük, hogy egy minimális lefogó rendszer komplementere maximális független ponthalmaz. Ezért a változók feleljenek meg a csúcsoknak.

A feltételek: $x_i \geq 0$, $x_i \leq 1$ minden $1 \leq i \leq n$ esetén és $x_i + x_j \leq 1$ ha az $\{i, j\} \in E(G)$.

A célfüggvény: $\max \sum_i x_i$

Ez jó: Tekintsük egy lefogó pontrendszert. Ekkor, ha a benne levő csúcsokra $x_i = 0$, egyébként meg $x_i = 1$, akkor ezek a változók teljesítik az egyenlőtlenségeket. Másrészt ha az x_i-k az egyenlőtlenségeket teljesítő egész számok, akkor mindegyik változó értéke 1 vagy 0, és azokat a csúcsokat kiválasztva, melyekre, $x_i = 0$ egy lefogó rendszert kapunk, mert minden élnek legalább az egyik vége benne van.

A célfüggvény azt írja le, hogy a komplementere maximális, azaz a ponthalmazunk minimális.

4. Adott egy $G = (V,E)$ irányítatlan, egyszerű gráf, melyben minden $v \in V$ csúcshoz tartozik egy c_v súly, ami tetszőleges egész szám lehet. A G gráf legfeljebb 2000 elemű független csúcshalmazai közül keressünk olyat, melyben a csúcsok súlyainak összege maximális. Fogalmazza meg a kérdést egészértékű programozási feladatként! (A feladatot nem kell megoldani, csak átfogalmazni!)

   Megoldás:

   Minden v csúcshoz tartozik egy x_v változó.

   A feltételek: $x_v \geq 0$, $x_v \leq 1$ minden $v \in V(G)$ esetén, $x_v + x_w \leq 1$ ha az $\{v, w\} \in E(G)$ és $\sum_v x_v \leq 2000$

   A célfüggvény: $\max \sum_v c_v \cdot x_v$

   Ez jó: Az egyenlőtlenségek egész megoldásai megfelelnek az olyan független ponthalmazoknak, melyek mérete nem nagyobb, mint 2000.

   A célfüggvény pont a részhalmaz összsúlyát írja le.

5. Tegyük fel, hogy van egy eljárásunk, ami egy tetszőleges Boole-formuláról polinom időben eldönti, hogy a SAT nyelvnek eleme vagy nem. Hogyan lehet ezt felhasználva polinom időben megtalálni egy adott $\varphi(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ formulához a változóknak egy olyan értékelését, amelyet ha a φ-be behelyettesítünk, akkor a formula értéke igaz lesz?

   Megoldás: Először adjuk be az eljárásnak magát a φ formulát. Ha a válasz az, hogy nincs megoldás, akkor készen vagyunk. Ellenkező esetben legyen $i = 1$ és helyettesítsünk x_i helyébe hamis értéket. Legyen φ_0 az a formula, amit így φ-ből kapunk. Adjuk oda ezt az eljárásnak. Ha a válasz az, hogy továbbra is van megoldás, akkor legyen $\varphi = \varphi_0$, különben pedig $\varphi = \varphi_1$, ahol az utóbbi azt jelzi, amit az x_i helyébe igazat behelyettesítve kapunk. (Vegyük észre, hogy ha φ_0 nem, akkor φ_1 biztos kielégíthető.) Hajtsuk végre ugyanezt az $i = 2, 3, \ldots, n$ választással.

   Ezen a módon a változóknak sorban értéket adunk. Mivel minden i esetén x_i-nek olyan értéket választunk, amihez a hátralevő változók megválaszthatók úgy, hogy a formula igaz legyen, a végén, amikor minden változót rögzítettünk, az érték igaz lesz.

   Lépésszám: legyen az eredeti eljárás lépéspészáma az n változós formulákon $O(n^c)$. Ezt n-szer hívjuk meg, mindig legfeljebb n változós formulára. Ezért a lépésszáma $O(n^{c+1})$.

Megjegyzés: lehet, hogy az eredeti formulához több jó kiértékelés is van, ez a módszer ezekből egyet fog megtalálni, a lexikografikusan legelsőt.

6. Tegyük fel, hogy van egy eljárásunk, ami egy tetszőleges n csúcsú gráfról polinom időben megmondja, hogy van-e benne Hamilton-kör. Hogyan lehet ezt felhasználva polinom időben megtalálni egy adott G gráfban egy Hamilton-kört?

   Megoldás: Először adjuk be az eljárásnak a G gráfot. Ha az a válasz, hogy nincs benne Hamilton-kör, akkor készen vagyunk.

   Különben legyenek a G gráf élei $f_1, f_2, \ldots, f_m$. Az $i = 1, 2, \ldots m$ értékekre sorban csináljuk a következőt:

   Hagyjuk el a gráfból az f_i élet, jelölje a kapott gráfot G'. Adjuk be ezt a gráfot az eljárásnak. Amennyiben az a válasz, hogy van benne Hamilton-kör, akkor $G = G'$-vel folytatjuk az eljárást. Ha nincs benne, akkor viszont nem változtatjuk meg G-t.

   Vegyük észre, hogy az aktuális G-ben mindig lesz Hamilton-kör, de elhagyunk minden élet, ami ehhez "nem fontos". A végén a gráfban kizárólag egy Hamilton-kör élei maradnak meg, így itt már könnyű ezt ,,megtalálni".

   Lépésszám: Legyen az eredeti eljárás lépésszáma az n csúcsú gráfokon $O(n^c)$. Ezt m-szer hívjuk meg, $m < n^2$. Egy él elhagyása megoldható $O(n)$ lépésben, tehát az egész együtt $O(m(n^c + n))$, azaz polinomiális.

   Megjegyzés: Lehet, hogy eredetileg több Hamilton-kör is van a gráfban. Mindig azt ellenőrizzük, hogy marad-e az f_i elhagyása után is Hamilton-kör, és ha igen, akkor egy kevesebb élű gráffal folytatjuk.

7. Tegyük fel, hogy van egy eljárásunk, ami egy tetszőleges n csúcsú gráfról polinom időben megmondja, hogy az kiszínezhető-e 3 színnel. Hogyan lehet ezt felhasználva polinom időben megtalálni egy adott G gráfnak egy 3 színnel színezését (ha van ilyen egyáltalán)?

   Megoldás: Az ötlet hasonló a korábban látott Hamolton-körös feladat ötletéhez, úgy akarjuk módosítani a gráfot, hogy a végére már csak egy megoldás maradjon és az könnyen kiolvasható legyen a kapott gráfból.

   Kezdjük most is azzal, hogy az eljárásnak beadjuk a G gráfot. Ha az az eredmény, hogy nem lehet 3 színnel kiszínezni, akkor készen vagyunk.

   Ellenkező esetben húzzunk be egy új élet és az így kapott G' gráfot adjuk az eljárásnak. Ha ez is jó, akkor folytassuk a $G = G'$ gráffal, különben meg G-vel. Ha ezt minden hiányzó élre megcsináljuk, akkor a végeredményül kapott gráf még mindig kiszínezhető 3 színnel, viszont egyetlen további él sem húzható be úgy, hogy ez a tulajdonság megmaradjon. Azaz a gráf pontjai 3 független halmazra oszthatók, amik között minden él be van húzva. Tehát ha azokat színezzük egyformára, amik között nincs él, egy jó színezést kapunk.

   A módszer során az eljárást $O(n^2)$-szer hívtuk (n a gráf csúcsainak száma) és ugyanennyiszer kell egy élet hozzáadnunk, így tehát a feltevés miatt egy polinomiális algoritmust kaptunk.

   Egy másik megoldás: A csúcsokat egymás után megpróbáljuk úgy kiszínezni, hogy folytatható legyen az egész gráfra. De az eljárásnak nem adhatunk be egy részben kiszínezett gráfot, ezért G mellé vegyünk fel 3 új csúcsot, legyenek ezek a, b és c, és ezt a három csúcsot kössük össze egymással. Most ha G egy v csúcsát összekötjük a-val és b-vel, és az így kapott gráf kiszínezhető 3 színnel, akkor v színe a c színével megegyező.

   Ezek után a módszer a következő lehet: először az eljárást futtatjuk azon a G' gráfon, ami G-ből és a 3 új csúcson levő K_3-ból áll. Ha ez nem színezhető ki 3 színnel, akkor G sem, és készen vagyunk. Utána sorban minden v csúcsra csináljuk a következőt: Először összekötjük a-val és b-vel, és ezt adjuk az eljárásnak. Ha az a válasz, hogy igen, akkor ez lesz az új G'. Különben v-t összekötjük a-val és c-vel, ha most az a válasz, hogy ez a gráf 3 színnel színezhető, akkor ez az új G', egyébként meg az, amikor v a b-vel és c-vel van összekötve. (Ha a másik kettő nem, akkor ez a harmadik biztos kiszínezhető 3 színnel.) Végül G minden csúcsa össze lesz kötve az a, b, c csúcsokból kettővel, azok lesznek egyforma színűek, amelyek ugyanazzal a kettővel vannak összekötve.

   Lépésszám: El kell készíteni a G' gráfot, ehhez mindig új éleket adunk, ami polinom lépés, $(2n + 1)$-szer hívjuk meg az eljárást, ami összesen $O(n^{c+1})$, tehát polinom lépés.

8. Tegyük fel, hogy van egy eljárásunk, ami ha egy $G = (V, E)$ gráfot és egy $k \leq |V|$ pozitív egészet kap bemenetként, akkor polinom időben megmondja, hogy van-e G-ben k független pont.

(a) Hogyan lehet ezt felhasználva polinom időben meghatározni egy adott H gráfban a legnagyobb független ponthalmaz méretét?

(b) Hogyan lehet megtalálni egy ilyen legnagyobb ponthalmazt polinom időben?

Megoldás: (a) Az eljárást hívjuk meg a $(H, 1)$, $(H, 2)$, $\ldots$ párokra. Ha a k-adik az utolsó, amire a válasz igen, akkor $\alpha(H) = k$. Nyilván legfeljebb annyi hívás lesz, amennyi csúcsa van H-nak, tehát ez összesen polinom sok lépés. (A megfelelő értéket bináris kereséssel is meghatározhatjuk, akkor a lépésszám is kevesebb lesz.)

(b) Most már tudjuk, hogy k méretű független halmazt keresünk. Élek behúzogatásával eljuthatunk egy olyan G-t tartalmazó gráfhoz, amiben egy k méretű független ponthalmaz kivételével már minden él be van húzva (ahogy a 3 színnel színezhetőség 1. megoldásában). Ehhez összesen kevesebb, mint n^2-szer kell hívni az eljárást n pontú gráfokra, ami polinomiális lépésszám.