Algoritmuselmélet vizsga, 2003. december 19.

A feladatokhoz indoklást kérünk. Minden feladat 10 pontot ér, az elégségeshez/aláíráshoz 20 pontot kell elérni.

1. (a) Add meg az alábbi, a piros-kék algoritmus leírásában előforduló fogalmak definícióját: takaros színezés, piros szabály, kék szabály.
   (b) Mutasd meg, hogy Kruskal és Prim algoritmusa miért tekinthető a piros-kék algoritmus egy-egy változatának.

2. Bizonyítsd be, hogy létezik olyan nyelv, ami az R és RE nyelvosztályok közül csak az egyikben van benne. (A diagonális nyelvről tanultakat eközben felhasználhatod.)

3. Az L_1 és L_2 nyelvekről tudjuk, hogy $L_1 \in P$ és $L_2 \in PSPACE$. Igaz-e, hogy
   (a) $L_1 \cap L_2 \in R$?
   (b) $L_1 \cap L_2 \in PSPACE$?
   (c) $L_1 \cap L_2 \in EXPTIME$?

4. Az A és a B két n elemű tömb, melyek rendezetten tartalmazzák az elemeiket és tudjuk, hogy a két tömbben tárolt $2n$ elem mind különböző. Adj olyan $O(\log^2 n)$ lépésszámú algoritmust, ami megtalálja a $2n$ tárolt elem közül az n-edik legkisebbet, vagyis azt, amelyiknél $n-1$ kisebb van.

5. Éllistával adott egy G irányított, irányított-kör mentes gráf, melynek éleihez egész súlyok vannak rendelve. G-ben kettő kijelölt csúcs, s és t kivételével minden csúcs színes: vannak zöld és sárga csúcsok (egy csúcsnak csak egyfajta színe van). Adj $O(n+e)$ lépésszámú algoritmust, ami meghatározza azon legkisebb súlyú út súlyát, mely s-ből t-be vezet és melyen van zöld és sárga csúcs is. (Az út súlya az úton levő élek súlyainak összege.)

6. P-beli vagy NP-teljes az alábbi nyelv?

$$\{\ G \mid G\ \ 2n \text{ csúcsú gráf, mely színezhető } n \text{ színnel}\ \}$$