

12. gyakorlat  
Kruskal algoritmus, UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet  
P, NP

- $G$  irányítatlan gráf a következő éllistával (zárójelben a költségek, az élek mindkét végpontjából felvannak sorolva):  
a:b(2),c(3); b:a(2),d(2); c:a(3),d(1); d:b(2),c(1),e(2),f(4); e:d(2),f(1),g(2); f:d(4),e(1),g(2),h(1); g:e(2),f(2),h(3); h:f(1),g(3);  
Keressünk  $G$ -ben Kruskal algoritmusával minimális költségű feszítőfát!
- UNIÓ-HOLVAN adatszerkezettel tároljuk az  $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$  halmaz partícióit. Kezdetben a triviális partíciónk van:  $\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{7\}, \{8\}$ .  
Hajtsa végre az alábbi műveleteket és rajzolja le, hogy hogyan néznek ki az adatszerkezetben használt fák az egyes műveletek után. Ha két egyforma méretű fát úniózzunk, akkor legyen a kisebb gyökér az új fa gyökere.  
UNIÓ(1,2), UNIÓ(3,4), UNIÓ(5,6), UNIÓ(5,7), UNIÓ(5,1), HOLVAN(7), HOLVAN(2).  
Hogy döntjük el, hogy 6 és 4 ugyanabban a részhalmazban van-e?
- Futtaasa az 1. feladat gráfján a Kruskal algoritmust a következő élsorrenddel:  
 $cd, fh, ab, bd, de, fg, eg, ac, gh, df$ . Hogyan néznek ki az UNIÓ-HOLVAN adatszerkezet fái az  $ab$  él megvizsgálása után? Mi történik (milyen műveleteket hajtunk végre és mi lesz ezek hatása), amikor a  $bd$  élet vizsgáljuk?

---
4. Bizonyítsa be, hogy az alábbi  $P_1, P_2, P_3$  és  $P_5$  eldöntési problémák NP-beliek, a  $P_4$  pedig coNP-beli. Melyekről tudja belátni, hogy P-ben vannak?  
 $P_1$  : adott  $G$  páros gráf és  $k$  pozitív egész esetén van-e  $G$ -ben  $k$  élből álló párosítás?  
 $P_2$  : adott  $G$  irányítatlan gráfban van-e Euler kör?  
 $P_3$  : adott  $G$  irányítatlan gráf és  $k$  pozitív egész esetén van-e  $G$ -ben  $k$  darab független pont?  
 $P_4$  : adott  $m$  egész szám prím-e?  
 $P_5$  : adott  $(s_1, \dots, s_n)$  pozitív egészek és adott  $b$  egész pozitív szám esetén ki lehet-e választani néhány  $s_i$ -t, melyek összege  $b$ ?
5. Bizonyítsa be az alábbi két problémáról, hogy NP-beliek. Melyikről tudja belátni, hogy P-ben van? Melyikről látja, hogy coNP-beli?  
 $P_1$  : adott  $G$  irányítatlan gráfban van-e legfeljebb 100 élből álló kör?  
 $P_2$  : adott  $G$  irányítatlan gráf és  $k$  pozitív egész esetén van-e  $G$ -ben legfeljebb  $k$  élből álló kör?

---
6. Irányítatlan gráf tárolására adjon meg egy adatszerkezetet az alábbi műveletekkel:  
ÚJCSÚCS( $v$ ): a gráfhoz hozzáad egy új csúcsot;  
ÚJÉL( $u, v$ ): a már létező  $u$  és  $v$  csúcsok közé felvesz egy élet;  
VANÚT( $u, v$ ): igen értéket ad vissza, ha vezet az  $u$  és  $v$  csúcsok között út, egyébként pedig *nem* értéket.  
Ha a tárolt gráfnak  $n$  csúcsa van, akkor mindhárom művelet lépésszáma legyen  $O(\log n)$ .