

2. gyakorlat
Ordó

1. Állapítsa meg, hogy az alábbi függvények esetén mely párokra teljesül, hogy $f_i(n) = O(f_j(n))$. Válaszát indokolja is!

$$f_1(n) = 11n^2, \quad f_2(n) = 8n^2 \log n, \quad f_3(n) = n^2 + 100000.$$

-
2. Bizonyítsa be, hogy $\log_2 f(n) = \Theta(\log_{100} f(n))$ ($f(n) > 0$).
3. Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = \frac{1}{100}n^2 \log n, \quad f_2(n) = 10^{10}(\log n)^3 - 100 \log n \quad f_3(n) = 8^{\log n}.$$

4. Egy \mathcal{A} algoritmusról azt tudjuk, hogy az n hosszú bemeneteken a lépésszáma $O(n \log n)$. Lehetséges-e, hogy
- (a) van olyan x bemenet, amin a lépésszáma $|x|^3$?
 - (b) minden x bemeneten legfeljebb $2007|x|$ lépést használ?
- (Szokás szerint $|x|$ az x szó hosszát jelöli.)
5. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $L(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n = 2k > 4$ páros számra $L(2k) \leq L(2k - 2) + 1$ teljesül, és hogy $L(4) = 10$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n)$?
6. Legyen f és g két, a pozitív számokat a pozitív számokba képező függvény. Tudjuk, hogy $f(x) = O(h(x))$ és $g(x) = O(h(x))$. Igaz-e, hogy
- (a) ha g szigorúan monoton növekvő és $h(x) = 3x$, akkor $f(g(x)) = O(h(x))$;
 - (b) $f(g(x)) = O(h(x))$ minden h függvényre?

-
7. Az \mathcal{A} algoritmusról azt tudjuk, hogy összefüggő gráfokon $O(n + e)$ lépést tesz. Mutassa meg, hogy az is igaz, hogy összefüggő gráfokon az algoritmus lépésszáma $O(e)$.
8. Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = \frac{12}{365}8^n \quad f_2(n) = 2^{n^2} \quad f_3(n) = 2008n^{10}.$$

9. Ugyanarra a feladatra van két algoritmusunk A és B , a maximális lépésszámukat leíró függvények legyenek f_A és f_B . Tudjuk, hogy $f_A(n) = O(f_B(n) \cdot \log n)$. Következik-e ebből, hogy
- (a) A minden bemenetre gyorsabb, mint B ?
 - (b) A nagy bemenetekre gyorsabb, mint B ?
10. Az alábbi függvényeket rendezze olyan sorozatba, hogy ha f_i után közvetlenül f_j következik a sorban, akkor $f_i(n) = O(f_j(n))$ teljesüljön!

$$f_1(n) = 2^{100n} - 2^{50n} \quad f_2(n) = 2007n^3 \quad f_3(n) = 3^{3n}.$$

11. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n csúcsú gráfokon $L(n)$. Azt tudjuk, hogy ha n páros, akkor $L(n) = L(\frac{n}{2}) + 5$ teljesül, ha pedig $n > 1$ páratlan, akkor $L(n) = L(n - 2) + 3$. Következik-e ebből, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n^2)$?
12. Jelölje egy algoritmus maximális lépésszámát az n hosszú bemeneteken $T(n)$. Azt tudjuk, hogy minden $n > 1$ egész számra $T(n) \leq T(\lceil \frac{n}{2} \rceil) + n$ teljesül, és hogy $T(1) = 1$ és azt is tudjuk, hogy a $T(n)$ függvény nem csökkenő. Bizonyítsa be, hogy az algoritmus lépésszáma $O(n \log n)$.