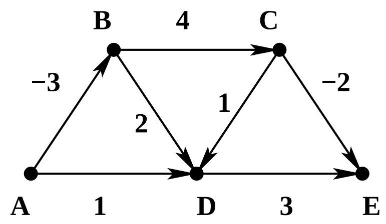
Algoritmusok elmélete
3. gyakorlat

2008. február 27.

1. Adjuk meg az összes olyan minimális élszámú irányított gráfot (élsúlyokkal együtt), amely(ek)re az alábbi táblázat a Dijkstra–algoritmusban szereplő D[ ] tömb változásait mutathatja. Adja meg a legrövidebb utakat tartalmazó P[ ] tömb állapotait is.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
0	2	6	∞	∞	7
0	2	5	9	∞	6
0	2	5	6	9	6
0	2	5	6	8	6
0	2	5	6	7	6

2. Határozza meg az A csúcsból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát az alábbi gráfban:



3. A mátrixával adott G irányított gráf élei között van egy negatív súlyú él, a többi él súlya pozitív. A gráfban nincs negatív súlyú kör. Adjon $O(n^2)$ lépésszámú algoritmust az $s \in V(G)$ pontból az összes többi pontba vezető legrövidebb utak meghatározására.

4. Legyen $G = (V, E)$ mátrixszal adott n-pontú, súlyozott élű irányított gráf. Tegyük fel, hogy G nem tartalmaz negatív összhosszúságú irányított kört, továbbá azt, hogy a G-beli egyszerű irányított utak legfeljebb 25 élből állnak. Javasoljunk $O(n^2)$ költségű módszert az $1 \in V$ pontból az összes további $v \in V$ pontokba vivő legrövidebb utak hosszának a meghatározására.

Házi feladat

5. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig az alábbiak: $s(a, b) = 5$, $s(a, e) = 6$, $s(b, c) = 4$, $s(b, d) = 6$, $s(c, a) = 3$, $s(c, d) = 1$, $s(d, e) = 2$, $s(e, c) = 2$, $s(e, f) = 1$, $s(f, b) = 3$, $s(f, c) = 1$, $s(f, d) = 1$.
a) Dijkstra módszerével határozza meg a-ból az összes többi csúcsba vezető legrövidebb út hosszát. (Indokolni nem kell, de látszódjon, lépésenként hogyan változik a távolságokat tároló D tömb és a KÉSZ halmaz.)
b) Egy él súlyát 1-gyel csökkentjük. Mely élek esetében nem változnak meg ezzel az a-tól mért távolságok?

Gyakorlók, az első kettő egyszerű, az utolsó gondolkodtatóbb

6. A 2. feladatban adott gráfban határozza meg Floyd módszerével az összes pontpárra a legrövidebb utak hosszát!

7. Egy irányított gráf csúcshalmaza $\{a, b, c, d, e, f\}$, az élek és súlyaik pedig a következőek: $s(a, b) = 6$, $s(a, c) = 5$, $s(a, e) = 8$, $s(b, a) = 5$, $s(b, e) = 1$, $s(b, f) = 2$, $s(c, b) = 2$, $s(c, f) = 4$, $s(e, b) = 6$, $s(e, d) = 3$, $s(f, d) = 1$, $s(f, e) = 1$.

a) Dijkstra-algoritmussal határozza meg a-ból az összes többi pontba vezető legrövidebb út hosszát. (Indokolni nem kell, de lépésenként írja fel a távolságokat tartalmazó D tömb és a KÉSZ halmaz állapotát.)
b) Vegyük hozzá a gráfhoz az (b, d) élet. Milyen $s(b, d) \geq 0$ súlyok esetén változnának meg ezzel a legrövidebb utak hosszai?
c) Egy él súlyát 1-gyel csökkentjük (az eredeti gráfban, ahol (b, d) él még nincsen). Mely élek esetében nem változnak meg ezzel az a-tól mért távolságok?

8. Nyári utazásunkra valutát akarunk váltani. A pénzváltó n különböző valutával foglalkozik, a j. fajta 1 egységéért r_{ij}-t kell fizetni az i. pénznemben. (Pl. ha a j. a dollár, az i. a forint, akkor most $r_{ij} = 222$ lehet.) Az r_{ij} tömb felhasználásával adjon $O(n^3)$ lépéses algoritmust, amely minden valutapárra meghatározza, hogy mi az elérhető legjobb átváltási arány, ha feltesszük, hogy az átváltásokért nem számolnak fel külön költséget. (Az i-ről a j-re való átváltás történhet több lépcsőben is, érdemes lehet előbb i-ről k_1-re konvertálni, onnan k_2-re, stb és végül j-re.)