1. Valószínűségszámítás gyakorlat — Csehi Csongor Gy. (honlap: www.cs.bme.hu/ cscsgy)

1. Legyen $A, B \in \Im$. Adja meg az $A, B$-t tartalmazó legszűkebb $\sigma-$algebrát!

2. a.) Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(AB)\mathbf{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right) \leq \frac{1}{4}$! b.) Mutassa meg, hogy tetszőleges $A, B, C$ eseményekre $|\mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(AC)| \leq \mathbf{P}\left(\bar{B}C + B\bar{C}\right)$!

3. Bizonyítsa be, hogy minden $A, B \in \Im$ esetén $-\frac{1}{4} \leq \mathbf{P}(AB) - \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \leq \frac{1}{4}$!

4. Bizonyítsa be, hogyha $\mathbf{P}(A) = 0,9$ és $\mathbf{P}(B) = 0,8$, akkor $\mathbf{P}(AB) \geq 0,7$!

5. Három kockával dobunk. $A$: „az összeg 7”, $B$: „mindegyik páros”, $C$: ”van közöttük hármas”. Számolja ki a $\mathbf{P}(A \cdot (B + \bar{C}))$ és $\mathbf{P}((A + C)\bar{B})$ valószínűségeket!

6. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a lottón a kihúzott öt szám közül nagyság szerint a középső 50-nél kisebb?

7. Tekintsük az összes olyan $n$ hosszúságú sorozatot, amelyek $0, 1, 2$ számokból állnak. Határozzuk meg annak a valószínűségét, hogy egy véletlenül választott ilyen sorozat: $A$: 0-val kezdődik; $B$: pontosan $m + 2$ db 0-át tartalmaz, melyek közül kettő a sorozat végén van; $C$: pontosan $m$ db 1-est tartalmaz; $D$: pontosan $m_0$ db 0-át, $m_1$ db 1-est és $m_2$ db 2-est tartalmaz.

8. Egy 10 cm oldalhosszúságú négyzetrácsos hálózatra leejtünk egy 3 cm átmérőjű köralakú pénzdarabot. Mennyi a valószínűsége, hogy a pénzdarab egy négyzet csúcsát fedi le?

9. Találomra kiválasztunk egy $P$ pontot az egységkör kerületén, majd egy $Q$ pontot a körlapon. Mennyi a valószínűsége, hogy a $QP$ szakasz hossza nagyobb mint 1?

10. Ha $x$ és $y$ két véletlenül választott 0 és 1 közé eső szám, akkor mennyi a valószínűsége, hogy $x + y < 1$ és $x \cdot y < 0.16$ lesz?

11. Bizonyítsa be, hogy minden $A, B, C \in \Im$ esetén $\mathbf{P}(A \triangle B) \leq \mathbf{P}(A \triangle C) + \mathbf{P}(B \triangle C)$!

12. * Egy $d$ szélességű lécekből álló padlózatra ledobunk egy $s = 2d$ hosszúságú tűt. Mennyi a valószínűsége, hogy a tű két padlórést fog egyszerre metszeni?

2. Valószínűségszámítás gyakorlat — Csehi Csongor Gy. (honlap: www.cs.bme.hu/ cscsgy)

I.41 Vegyünk egy véletlen $P = (a, b)$ pontot az egységnégyzetből. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a $p(x) = ax^2 - 2bx + 1$ polinomnak nincs valós gyöke?

I.106 A 00000 és a 99999 számok között találomra kiválasztunk egyet. Mennyi a valószínűsége, hogy $A$: minden számjegy különböző lesz; $B$: minden számjegy egyforma; $C$: csak két számjegy egyezik meg; $D$: három-kettő számjegy egyezik.

I.109 Az 52 lapos francia kártyacsomagból 4 játékosnak leosztunk 13-13 lapot. Mekkora valószínűsége lesz, hogy a.) mindenki kap ászt? b.) csak $i$ játékos kap ászt, $i = 1, 2, 3$?

I. 120 Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $A, B$ eseményekre $(\mathbf{P}(AB))^2 + \left(\mathbf{P}\left(A\bar{B}\right)\right)^2 + \left(\mathbf{P}\left(\bar{A}B\right)\right)^2 + \left(\mathbf{P}\left(\bar{A}\bar{B}\right)\right)^2 \geq 0,25$!

I. 122 Egy céltábla tíz koncentrikus körből áll, a sugarak $R_1 < R_2 < \cdots < R_{10}$ . $A_k$ azt az eseményt jelenti, hogy egy lövés az $R_k$ sugarú körbe esik. Egyszerűsítsük az alábbi eseményeket: $B = A_1 + A_3 + A_6,\ C = A_2 A_4 A_6 A_8,\ D = (A_1 + A_3) A_6$!

I. 123 Tegyük fel, hogy $A, B$ $\frac{1}{2}$ valószínűségű események. Mutassuk meg, hogy ekkor $\mathbf{P}(AB) = \mathbf{P}\left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right)$!

I. 124 Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $A, B$ eseményekre $\mathbf{P}\left(\bar{A}B + A\bar{B}\right) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - 2\mathbf{P}(AB)$!

I. 134 Egy szabályos érmével $n$-szer dobva, mennyi a valószínűsége, hogy a.) először az $n$-edikre jön fej? b.) ugyanannyi fejet dobunk, mint írást? c.) pontosan két fejet dobunk? d.) legalább két fejet dobunk? e.) a fejek száma páratlan lesz?

I. 139 Ha $n$ egyforma ládába elhelyezünk $n$ egyforma golyót úgy, hogy bármely ládába ugyanolyan valószínűséggel tesszük bármelyik golyót, mennyi a valószínűsége annak, hogy mindegyik ládában lesz golyó?

I. 140 Egy 52 lapos francia kártyacsomagból 13 lapot találomra visszatevés nélkül kihúzunk. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a.) a treff király a kihúzott lapok között lesz? b.) pontosan két treff lesz a leosztott lapok közt? c.) a treff király és a treff ász a kihúzott lapok közt van? d.) van treff a leosztott lapok között?

I. 156 Egy egységnyi hosszú szakaszt eltörünk, majd a hosszabbik részt újból eltörjük. Mennyi a valószínűsége, hogy a keletkező három szakaszból lehet háromszöget szerkeszteni?

I. 147 * Az egységintervallumban véletlenszerűen kijelölve két pontot, mekkora a valószínűsége, hogy a keletkező három szakaszból háromszög szerkeszthető?

3. Valószínűségszámítás gyakorlat — Csehi Csongor Gy. (honlap: www.cs.bme.hu/ cscsgy)

I. 118 Mennyi $\mathbf{P}\left(A \mid \bar{B}\right)$ ha $\mathbf{P}(A) = 0,6,\ \mathbf{P}(B) = 0,5$ és $\mathbf{P}(A + B) = 0,8$?

I. 163 Az $A$ és $B$ események közül legalább az egyik mindig bekövetkezik. Ha $\mathbf{P}(A|B) = 0,2$ és $\mathbf{P}(B|A) = 0,5$, $\mathbf{P}(A), \mathbf{P}(B) =$?

I. 157 Számoljuk ki annak feltételes valószínűségét, hogy két kockával dobva mindkét érték páros feltéve, hogy összegük legalább tíz!

I. 166 Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három szabályos kockadobás között van hatos, ha minden kockán különböző érték van?

I.45 Feldobunk egy szabályos érmét, ha *fej*, egyszer, ha *írás* kétszer dobunk szabályos kockával. $P(\text{lesz hatos}) =$?

I.46 Egy rekeszben 15 teniszlabda van, melyek közül 9 még használatlan. Három játékhoz kiveszünk találomra három labdát, majd a játék után visszarakjuk azokat a rekeszbe. (Nyilván, ha volt közöttük használatlan, az a játék során elveszti ezt a tulajdonságát.) Mennyi a valószínűsége annak, mindhárom kivételhez 1 új és 2 használt labda kerül a kezünkbe?

I.111 Egy dobozban 10 golyó van, pirosak és kékek, mindkét színből legalább egy. Nem ismerjük a doboz tartalmát, bármely összetétel ugyanolyan valószínűségű. Kétszer húzunk a dobozból visszatevéssel, és mindkét golyó színe piros volt. Melyik összetétel a legvalószínűbb?

I.115 Feldobunk egy szabályos kockát, majd egy szabályos érmét annyiszor, amennyit a kocka mutat. a) mennyi a valószínűsége, hogy egyszer sem dobunk fejet;b) feltéve, hogy egyszer sem dobunk fejet, mennyi a valószínűsége, hogy 6-ost dobtunk?

I.116 Röntgenvizsgálat során $0,95$ annak a valószínűsége, hogy tbc-s beteg betegségét felfedezik. Annak valószínűsége, hogy egy egészséges embert betegnek találnak $0,001$. A tbc-ben szenvedők aránya a lakosságon belül $0,0001$. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az ember egészséges, ha átvilágításkor betegnek találták?

I.176 Kilenc kartonlapra három színnel (piros, kék, zöld) felírjuk az 1, 2, 3 számjegyeket, majd a kartonokat összekeverve belerakjuk egy kalapba. Ezután -visszatevéssel (a)/ nélkül (b)- addig húzunk egyenként a kartonokat, míg piros színű számot nem kapunk. Mennyi a valószínűsége, hogy az így kihúzott kartonok között van hármas?

I.112 * Valaki feldob egy kockát, és ha az eredmény $k$, akkor $k$ piros és $7 - k$ fehér golyót beletesz egy úrnába. A dobás eredményét előttünk titokban tartja. Ezután 10-szer húz visszatevéssel az úrnából, és a kihúzott golyó színét mindig megmondja. Ennek alapján kell eltalálni azt, hogy a kockán hányast dobott előzőleg. Hogyan tippeljünk? Mekkora esélyünk van a találatra?

4. Valószínűségszámítás gyakorlat — Csehi Csongor Gy. (honlap: www.cs.bme.hu/ cscsgy)

II.42 Eloszlásfüggvény-e az $F(x) = \exp\left(-e^{-x}\right)$?

II.43 Jelölje $X$ egy szabályos kockadobás eredményét! Mi az $Y = (X - 3)^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye!

II.38 Az $\alpha$ paraméter melyik értékénél lesz sűrűségfüggvény az $f(x) = \alpha\left(2x - x^2\right)$, $x \in (0, 2)$? Add meg az eloszlásfüggvényt!

II.12 Milyen $b$ értéknél lesz az $f(x) = b\sqrt{x-2},\ x \in (2, 3)$ függvény sűrűségfüggvény?

I.131 Milyen $b$ értéknél lesz az $f(x) = b\sqrt{x-2},\ x \in (3, 4)$ függvény sűrűségfüggvény? Mi az eloszlásfüggvény képlete?

II.40 Egy $X$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $f_X(x) = A\cos\frac{x}{2}$, ha $0 < x < \pi$. a.) $A =$? b.) $F_X =$? c.) $\mathbf{P}\left(X > \frac{\pi}{2}\right) =$?

II.4 A $(0, 1)$ intervallumban kijelölünk három pontot véletlenszerűen. Határozzuk meg a középső pont eloszlásfüggvényét!

II.5 Egy 32 lapos magyar kártyából kihúzott lap értéke legyen $X$. $F_X =$? $P(7,5 < X < 10,2) =$?

II.55 Egy 32 lapos kártyából addig húzunk, amíg ászt nem kapunk, $X$ az eközben kihúzott hetesek száma.$\mathbf{P}(X = 0) =$?

II.69 Adjuk meg a 90/5 lottón kihúzott öt szám közül a legkisebb eloszlásfüggvényének az értékét a 25 helyen.

II.124 Egy benzinkút hetente kap üzemanyagot. A heti fogyasztás $X$ (100 ezer literekben), $f_X(x) = 5(1 - x)^4$, ha $0 < x < 1$. Mekkora legyen a tartály kapacitása, hogy annak valószínűsége, hogy a hét során kifogy a benzin, kisebb legyen $0,05$-nél?

II.47 Egy egységnyi oldalú szabályos háromszög kerületén véletlenszerűen kiválasztunk egy pontot. Jelölje $X$ a pontnak a súlyponttól vett távolságát! Számolja ki a $\mathbf{P}(X \geq 0,5)$ valószínűséget!

I.130 Válasszunk ki véletlenszerűen két pontot az egységkör kerületén. Jelölje $X$ a két pontot összekötő húr hosszát. $F_X =$?