1. Legyen A, B két esemény, amelyre $2P(A) = 2P(A|B) = P(B|A) = \frac{1}{2}$. Számítsa ki $P(A+B)$-t!

   $P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \implies P(AB) = P(B|A) \cdot P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{8}$,
   $P(A|B) = \frac{P(AB)}{P(B)} \implies P(B) = \frac{P(AB)}{P(A|B)} = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$,
   $P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{8} = \frac{5}{8} = 0,625$.

2. Négy doboz mindegyikében négy-négy darab golyó van, melyek között rendre 1, 2, 3, 4 darab fehér színű található (a többi piros). Egy dobozt véletlenszerűen kiválasztunk, majd abból visszatevéssel három golyót kihúzunk. Ha azt tapasztaljuk, hogy mindhárom golyó fehér színű, mennyi annak a valószínűsége, hogy a csupa fehér golyót tartalmazó dobozt választottuk ki előzőleg?

   Ez a feltételes valószínűség a Bayes tételből számolható, ahol a teljes eseményrendszer:
   $A_i =$ „az i. dobozból húzunk”, $i = 1,2,3,4$. Ezekre $P(A_i) = \frac{1}{4},\ i = 1,2,3,4$,
   és a $B =$ „mindhárom kihúzott golyó fehér” eseményre $P(B|A_i) = (\frac{i}{4})^3,\ i = 1,2,3,4$.
   Így $P(B) = \frac{1}{4} \cdot (\frac{1}{4})^3 + \frac{1}{4} \cdot (\frac{2}{4})^3 + \frac{1}{4} \cdot (\frac{3}{4})^3 + \frac{1}{4} \cdot (\frac{4}{4})^3 = \frac{25}{64}$ (a teljes valószínűség tétel szerint),
   és $P(A_4|B) = \frac{\frac{1}{4}\cdot(\frac{4}{4})^3}{P(B)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{25}{64}} = \frac{16}{25} = 0,64$.

3. Legyen X egy 2 paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó.
   a) Számolja ki a $P(X > 1)$ valószínűséget!
   b) Adja meg az $E(2-X)^2$ és $\sigma^2(3-2X)$ mennyiségeket, amennyiben léteznek.

   a) $P(X > 1) = 1 - F_X(1)$, ahol F_X a $\lambda = 2$ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, $F_X(a) = 1 - e^{-\lambda a},\ a > 0$, így $P(X > 1) = 1 - F_X(1) = e^{-2} \approx 0,135$.
   b) $E(2-X)^2 = E(4 - 4X + X^2) = E(4) - E(4X) + E(X^2) = 4 - 4E(X) + (\sigma^2(X) + E^2(X)) = 4 - 4 \cdot \frac{1}{2} + (\frac{1}{4} + (\frac{1}{2})^2) = 2,5$,
   $\sigma^2(3-2X) = \sigma^2(-2X) = (-2)^2\sigma^2(X) = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$

4. Egy normális eloszlású valószínűségi változó 0,2 valószínűséggel vesz fel 10-nél kisebb értéket és 0,3 valószínűséggel 14-nél nagyobb értéket. Mik az eloszlás paraméterei?

   Ha $X \in N(m,\sigma)$, akkor $\frac{X-m}{\sigma} \in N(0,1)$, így a standard normális eloszlás eloszlásfüggvényével:
   $P(X < 10) = P(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{10-m}{\sigma}) = \Phi(\frac{10-m}{\sigma}) = 0,2 \implies \Phi(\frac{m-10}{\sigma}) = 0,8 \implies \frac{m-10}{\sigma} \approx 0,84$, és
   $P(X > 14) = 1 - P(X < 14) = 1 - P(\frac{X-m}{\sigma} < \frac{14-m}{\sigma}) = 1 - \Phi(\frac{14-m}{\sigma}) = 0,3 \implies \Phi(\frac{14-m}{\sigma}) = 0,7 \implies \frac{14-m}{\sigma} \approx 0,52$.
   Az egyenletrendszert megoldva: (pl. a két egyenlet összege $\frac{4}{\sigma} = 1,38$) $\sigma \approx 2,9,\ m \approx 12,43$

5. Egy iskolás korcsoportban minden ötödik gyerek szemüveges. Mekkora a valószínűsége annak, hogy egy 1500 fős iskolában a szemüveges tanulók száma nem éri el a 280-at?

   Ha X jelenti a szemüvegesek számát az iskolában, akkor $X \in B(1500, \frac{1}{5})$.
   A de Moivre-Laplace tétel alapján $\frac{X-E(X)}{\sigma(X)}$ eloszlása közelítőleg standard normális, azaz $\frac{X-300}{\sqrt{240}}$ eloszlásfüggvénye közelítőleg $\Phi(x)$, így
   $P(X < 280) = P(\frac{X-300}{\sqrt{240}} < \frac{280-300}{\sqrt{240}}) \approx \Phi(\frac{280-300}{\sqrt{240}}) \approx \Phi(-1,29) = 1 - \Phi(1,29) \approx 1 - 0,9015 = 0,0985$.

6. Egy gép előírt hosszúságú darabokat vág le egy acéllemezből, de a hosszúság normális eloszlású ingadozást mutat, melynek szórása 3 cm. Adjunk 95%-os megbízhatósági szintű konfidencia intervallumot a levágott darabok átlagos hosszára, ha egy 81 elemű minta átlaga 81 cm!

   A konfidenciaintervallum $(\overline{X} - u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X} + u_\alpha \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$, ahol $\Phi(u_\alpha) = 1 - \frac{\alpha}{2}$. Most $\overline{X} = 81,\ \alpha = 0,05,\ n = 81$, így a konfidenciaintervallum $(80,346,\ 81,654)$.