8. Gyakorlat
Együttes sűrűségfüggvény, Konvolúció

1. Legyenek $X \sim U(0;3)$ és $Y \sim U(-1;4)$ független valószínűségi változók. Ábrázoljuk az (X,Y) együttes eloszlásfüggvényének szinthalmazait. Határozzuk meg az alábbi mennyiségeket:

   a) $\mathbb{P}(X < Y) =?$ b) $\mathbb{P}(X + Y = 1) =?$ c) $\mathbb{P}(XY < 1) =?$

2. Legyenek $X, Y \sim U(0;1)$ függetlenek, $Z = 2X + 1$, $V = 3Y$. $\mathbb{P}(V < Z) =?$

3. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x,y) \mapsto \begin{cases} 2(x^3 + y^3) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   a) $P(X + Y < 1) =?$ b) $P(X^2 < Y) =?$ c) Adjuk meg X és Y perem-sűrűségfüggvényét.
   d) $\mathbb{E}(X) =?$ e) Független-e X és Y?

4. Az (X,Y) folytonos valószínűségi vektorváltozó eloszlásfüggvényéről tudjuk, hogy minden $0 < x < 1$ és $|y| < 1$ esetén

$$F_{X,Y}(x,y) = \frac{xy^3 + x}{2}.$$

   Az X értékkészlete a $[0,1]$ intervallum, míg Y értékkészlete a $[-1,1]$. Mennyi a valószínűsége, hogy az (X,Y) pár az $A(0,0)$, $B\left(\frac{1}{2}, 0\right)$, $C\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ csúcspontok által meghatározott háromszög belsejébe esik? (Segítség: az együttes sűrűségfüggvény hasznos.)

5. Legyen X és Y együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x,y) \mapsto \begin{cases} a(4x + y) + bxy + \frac{2}{5} & \text{ha } 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   valamilyen a és b valós számok esetén. Milyen a és b értékek esetén lesznek X és Y független valószínűségi változók?

6. Legyenek $X, Y \sim \text{Exp}(1)$ függetlenek. Adjuk meg $Q = \min(X,Y)$ és $R = \max(X,Y)$ eloszlását és várható értékét. Független-e Q és R?

---

7. Legyenek $X, Y \sim \text{Geo}(p)$ függetlenek. Adjuk meg a $\mathbb{P}(X = Y)$ valószínűséget. Mennyi $\mathbb{P}(X + Y = k)$, $k \geq 2$ esetén?

8. Legyen $X \sim B(m;p)$ és $Y \sim B(n;p)$ függetlenek, ahol $m, n \in \mathbb{N}$ és $0 < p < 1$. Milyen eloszlású $X + Y$?

9. Legyenek X és Y független valószínűségi változók, amire $Y \sim U(0;1)$ és

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & \text{ha } x \in [0,1], \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

   Számoljuk ki $X + Y$ sűrűségfüggvényét.

10. Legyenek $X, Y \sim U(0;1)$ függetlenek, és legyen

    a) $Z = X + Y$ b) $Z = X - Y$ c) $Z = 3X - 2Y$

    Számoljuk ki Z sűrűség- és eloszlásfüggvényét.

11. Legyenek $X, Y \sim \text{Exp}(\lambda)$ függetlenek, és $Z = |X - Y|$. Határozzuk meg Z sűrűségfüggvényét.

IMSc 7. Legyenek A_1, A_2, B_1, B_2 olyan események, hogy A_1 független A_2-től és B_1 független B_2-től. Tegyük fel, hogy mind a négy esemény valószínűsége $\frac{2}{5}$. Jelölje X azt, hogy hány A_i jelű esemény teljesül, és Y azt, hogy hány B_i jelű esemény teljesül. Mi $\text{corr}(X,Y)$ lehető legkisebb értéke?