5. Gyakorlat

Exponenciális, Geometriai és Poisson-eloszlás

1. Legyen X exponenciális eloszlású valószínűségi változó, amiről tudjuk, hogy $\mathbb{P}(X > 3) = e^{-6}$.
   a) Mi X eloszlásának paramétere (λ)? b) $\mathbb{P}(X < 2) = ?$ c) $\mathbb{E}(X) = ?$

2. Tegyük fel, hogy egy adott mosógéptípus átlagosan 2 évig bírja az első meghibásodásig, és az első meghibásodás időpontja folytonos, örökifjú eloszlást követ. Mi a valószínűsége, hogy az első 3 év során nem hibásodik meg, ha tudjuk, hogy az első 2 évben hibátlanul működött?

3. Hullócsillagra várva kémleljük az eget egy kora augusztusi éjszaka. Tudjuk, hogy annak az esélye, hogy az első 20 percben látunk hullócsillagot $1-e^{-\frac{2}{3}}$. Feltehetjük, hogy egy hullócsillag észleléséig hátralévő idő nem függ az eddig eltelt idő hosszától (azaz az eloszlás folytonos, örökifjú). Mekkora eséllyel látunk hullócsillagot az első órában?

4. Legyenek X és Y exponenciális eloszlású valószínűségi változók. Tudjuk, hogy X várható értéke kétszerese Y várható értékének, továbbá, hogy $3\,\mathbb{P}(X > 1) = 2\,\mathbb{P}(Y < 1)$. Mennyi X várható értéke?

---

5. Válasszunk egymástól függetlenül, véletlenszerűen pontokat az egységintervallumban. Addig folytatjuk a pontok választását, amíg valamelyik az intervallum középső harmadába nem esik. Jelölje X a kiválasztott pontok számát. Mekkora a $\mathbb{P}\left(X < 5\right)$ valószínűség?

6. Egy érmével addig dobunk, amíg először fordul elő, hogy két egymás utáni dobás értéke azonos. Mennyi a szükséges dobások számának várható értéke?

7. A $[-1, 1] \times [-1, 1]$ négyzeten egymás után (egymástól függetlenül, egyenletesen) véletlenszerűen pontokat választunk. Akkor állunk meg, amikor az első kisorsolt pont beleesik az origó középpontú egységkörbe. Mi a pontok számának eloszlása? Mennyi a pontok számának várható értéke?

8. Egy szabályos pénzérmét addig dobunk fel újra és újra, amíg meg nem kapjuk a második fejet is. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az első fej után a második fejig ugyanannyi dobásra van szükség, mint amennyi az elsőig kellett?

---

9. Egy számítógépes szervizben egy hónap húsz munkanapjából átlagosan kettőn nincsen reklamáció. Poisson-eloszlást feltételezve mennyi annak a valószínűsége, hogy egy adott napon legalább három reklamáció érkezik?

10. Az egyetemen nagyon sok telefonkészülék van, amelyek egymástól függetlenül romlanak el azonos, egyenként kis valószínűséggel. Az év 360 napjából átlagosan 12 olyan nap van, hogy egyetlen készülék sem romlik el. Várhatóan hány telefon romlik el egy nap? Várhatóan hány olyan nap lesz, amikor 2 vagy 2-nél több telefon romlik el?

11. Lovas gátversenyen a ló az akadályok mindegyikét egymástól függetlenül, azonos valószínűséggel veri le. A pályán számtalan akadály akad. Ha 5% annak a valószínűsége, hogy a lovas hibátlanul teljesít egy kört, mennyi az esélye, hogy legfeljebb három akadályt ver le?

12. Egy futóversenyen a pályát sajnos kullanccsal fertőzött területen át vezették. Kiderült, hogy a versenyzők közül 300-an találtak magukban pontosan egy kullancsot, 75-en pedig kettőt. Ezek alapján becsüljük meg, hogy körülbelül hányan indultak a versenyen.

IMSc 5. Vegyünk egyenletesen véletlenszerűen egy pontot az origó közepű egységsugarú gömbben. Vetítsük ki ezt a pontot az origóból a gömbhéjra. Jelölje az így kapott pont három koordinátáját X, Y és Z. Vizsgáljuk meg X eloszlását: mivel a gömbhéj a gömb „csúcsai” körül kisebb, mint a „derekánál”, ezért X eloszlása koncentrálódhat a 0 körül. Derítsük ki, hogy mennyire, azaz határozzuk meg X sűrűségfüggvényét. (Most helyes szimulációból levont helyes következtetésre is teljes pont jár.)