4. Gyakorlat

Folytonos valószínűségi változók várható értéke, Sűrűségfüggvény karakterizációja

1. Az egységnégyzeten találomra kiválasztunk egy P pontot. Jelölje X a P-hez legközelebbi oldal és a P pont távolságát.
   a) Legyen $\Omega = \{(x, y) \mid 0 \leq x, y \leq 1\}$ az eseményterünk. Írjuk fel X-et, mint $\Omega \to \mathbb{R}$ függvényt.
   b) Mi X eloszlás- és sűrűségfüggvénye?

2. Az egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy a és egy b pontot. Jelöljük X-szel a két pont távolságának négyzetét.
   a) Határozzuk meg X eloszlásfüggvényét.
   b) Határozzuk meg X sűrűségfüggvényét.
   c) Átlagosan mekkora X?
   d) Hol a legnagyobb X sűrűségfüggvényének értéke?

3. Adjuk meg az ötös lottón kihúzott öt szám közül a legkisebb eloszlásfüggvényének értékét a 25 helyen. Folytonos-e ez az eloszlásfüggvény?

4. A $(0, 1)$ intervallumban kijelölünk három pontot véletlenszerűen. Jelölje Y a középső pontot.
   a) Határozzuk meg Y eloszlásfüggvényét és sűrűségfüggvényét.
   b) Mennyi Y várható értéke?

5. Egy benzinkút üzemanyagtartályát hetente teletöltik. Jelölje X a heti fogyasztást (százezer literekben), melynek sűrűségfüggvénye:
$$f_X : x \mapsto \begin{cases} 5\,(1-x)^4 & \text{ha } 0 < x < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$
   Mekkora legyen a tartály kapacitása, hogy annak a valószínűsége, hogy a héten kifogy az üzemanyag, kisebb legyen 0,05-nél? Mekkora az átlagos heti fogyasztás?

---

6. Eloszlásfüggvények-e az alábbi hozzárendelési szabályú $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvények?
   a) $F(x) = \begin{cases} 1 & \text{ha } x > 0, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
   b) $F(x) = e^{-e^{-x}}$
   c) $F(x) = 1 - e^{-x^2}$
   d) $F(x) = \frac{2}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{x}\right)$

7. Határozzuk meg az α értékét, ha tudjuk, hogy f sűrűségfüggvény. Adjuk meg az eloszlásfüggvényt is.
   a) $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha\left(2x - x^2\right) & \text{ha } 0 < x < 2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
   b) $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{x-2} & \text{ha } 2 < x < 3, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
   c) $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha\sqrt{x-2} & \text{ha } 3 < x < 4, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$
   d) $f : x \mapsto \begin{cases} \alpha\cos\frac{x}{2} & \text{ha } 0 < x < \pi, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$

   *e) Az egyes részfeladatokban milyen x esetén lesz $\mathbb{P}(X < x) = \frac{1}{2}$, ahol X az a valószínűségi változó, aminek a sűrűségfüggvénye a fenti? (Ezt az x-et hívják az eloszlás mediánjának.)

8. A Plútó törpebolygón lévő kráterek átmérőinek (km-ben vett) eloszlását közelítőleg az alábbi sűrűségfüggvényű S valószínűségi változóval írhatjuk le:
$$f_S : x \mapsto \begin{cases} cx^{-\frac{5}{2}} & \text{ha } x > d, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$
   Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}(S > 9) = 0{,}2689$.
   a) Határozzuk meg c értékét. b) Határozzuk meg d értékét.

IMSc 4. Egy tetszés szerinti ugróképes állat ül a koordinátasíkon az origóban. Háromféle lépésben tud közlekedni: vagy egy egységet jobbra ugrik, vagy két egységet felfelé, avagy egy egységet jobbra és kettőt felfelé. A három lehetősége közül egyenletesen véletlenszerűen választ, a korábbi lépéseitől függetlenül. Jelölje X és Y a jószág koordinátáit 42 lépés megtétele után. Mennyi $X + Y$ várható értéke?