

### 10. Gyakorlat

Kovariancia folytonos esetben, Lineáris regresszió

1. Legyenek  $X$  és  $Y$  független valószínűségi változók, ahol  $\mathbb{E}(X) = 4$ ,  $\mathbb{E}(Y) = 0$ ,  $\mathbb{D}^2(X) = 1$ ,  $\mathbb{D}^2(Y) = 2$ . Határozzuk meg az  $\mathbb{E}(5X - 6Y)$ ,  $\mathbb{E}(XY)$ ,  $\mathbb{D}^2(5X - 6Y + 8)$  és  $\text{cov}(5X + 2Y + 2, X + 6Y - 3)$  mennyiségeket.
2. Legyenek  $X, Y \sim U(0; 1)$  függetlenek, továbbá  $Z_1 = XY$  és  $Z_2 = X + Y$ .
  - a) Adjuk meg  $Z_1$  és  $Z_2$  várható értékét.
  - b) Igaz-e, hogy  $\mathbb{D}^2(XY)$  megegyezik  $\mathbb{D}^2(X) \cdot \mathbb{D}^2(Y)$ -nal?
  - c) Adjuk meg  $\mathbb{D}^2(Z_1 + 2Z_2)$ -t.
3. Legyen  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{X,Y} : (x, y) \mapsto \begin{cases} 2(x^3 + y^3) & \text{ha } 0 < x < 1 \text{ és } 0 < y < 1, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg a  $\text{cov}(X, Y)$ -t.

4. Legyen  $X \sim N(m; \sigma^2)$ ,  $Y = 3X + 8$ ,  $Z = 5 - 2X$ . Számoljuk ki az  $\text{corr}(Y, Z)$  korrelációs együtthatót.
5. Legyen  $X \sim U(0; 2\pi)$ ,  $Y = \cos(X)$  és  $Z = \sin(X)$ . Határozzuk meg  $\text{cov}(Y, Z)$ -t. Független-e  $Y$  és  $Z$ ?
6. Legyen  $U$  és  $V$  együttes sűrűségfüggvénye

$$f_{U,V} : (u, v) \mapsto \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{v}} & \text{ha } 0 < u < 1 \text{ és } 0 < v < u^2, \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Határozzuk meg  $\text{cov}(U, V^2)$ -et.

7. Legyenek  $X_1, X_2$  és  $X_3$  korrelálatlan valószínűségi változók, mind 0 várható értékkel és 1 szórással.
  - a) Mennyi  $\text{cov}(X_1 + X_2, X_2 + X_3)$ ,  $\mathbb{D}^2(X_1 + X_2)$  és  $\mathbb{D}^2(X_2 + X_3)$ ?
  - b) Mekkora a korreláció  $X_1 + X_2$  és  $X_2 + X_3$  között?
  - c) Mi a regressziós egyenese  $X_2 + X_3$ -nek  $X_1 + X_2$ -re?
  - d) Mekkora a fenti regressziós egyenessel történő közelítés hibájának szórásnégyzete?
8. Határozzuk meg az  $X^2 + X + 1$  regressziós egyenesét  $X$ -re, ha  $X$  eloszlása
  - a)  $\text{Exp}(5)$
  - b)  $N(0; 1)$
  - c\*)  $B(10; 0,3)$
9. Legyen  $X$  és  $Y$  együttes sűrűségfüggvénye a fenti 3. feladatban szereplő  $f_{X,Y}$ . Tudván, hogy  $\mathbb{D}^2(X) = 0,0775$ , mi az  $Y$  regressziós egyenese  $X$ -re, illetve  $X$  regressziós egyenese  $Y$ -ra? Mekkora a regressziós egyenes átlagos négyzetes hibája (azaz a hiba szórásnégyzete)?
10. Tegyük fel, hogy  $Y$  regressziós egyenese  $X$ -re:  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = x - 2\}$ , míg  $X$  regressziós egyenese  $Y$ -ra:  $\{(y, x) \in \mathbb{R}^2 \mid x = \frac{1}{4}y - \frac{11}{2}\}$ . Mennyi  $\mathbb{E}(X)$  és  $\mathbb{E}(Y)$ ?
11. Két dobókockával dobunk. Legyen  $X$  a dobott hatosok száma,  $Y$  a dobott párosok száma. Mi  $Y$  regressziós egyenese  $X$ -re, illetve  $X$  regressziós egyenese  $Y$ -ra?

IMSc 9. Legyenek  $X_1, X_2, \dots, X_n$  együttesen független,  $U(0; 1)$  eloszlású valószínűségi változók, és jelölje  $Y$  a maximumukat,  $Z$  a minimumukat. Határozzuk meg a  $\text{corr}(Y, Z)$  mennyiséget ( $n$  függvényében).